Индексные множества классов моделей

Estimation of algorithmic complexity

Евгений Н. Павловский
eugene.pavlovsky@gmail.com

Новосибирский Государственный Университет

Апрель 1, 2008

Содержание

Outline

- Определения

1. Верхние оценки
   - Счётно-категоричные теории.
   - Несчётно-категоричные теории.
   - Простые модели
   - Простые d-разрешимые модели
   - Модели с Эренфойхтовыми теориями
2. Нижние оценки
   - Маркеровская конструкция
   - 1-1 представление
   - Омега-скачок в нижних оценках
   - Нижняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями
   - Дополнение
3. Открытые проблемы

Определения

Вычислимая модель.

Рассмотрим вычислимый язык $\sigma = \{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots; \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1, \ldots\}$ без функциональных символов.

Definition

Вычислимой моделью $\mathcal{A}$ называется модель над ω, в которой основное множество и все предикаты и множество констант равномерно вычислимы.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Гёделевская нумерация всех формул сигнатуры σ.

Определения

Индексное множество.

Существует вычислимая нумерация всех вычислимых моделей любой сигнатуры σ без функциональных символов: $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$

Определение

Индексным множеством $\mathrm{I(K)}$ называется множество $\{\mathrm{i} \,|\, \mathcal{M}_\mathrm{i} \in \mathrm{K}\}$ для некоторого заданного K – класса моделей сигнатуры σ. При этом, если K абстрактный класс, то рассматриваются все вычислимые модели из этого класса, для класса вычислимых моделей рассматриваются модели $\mathcal{M}_\mathrm{i} \cong_\mathrm{c} \mathcal{A} \in \mathrm{K}$.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \mid \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \mid \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \mid \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \mid \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega^{CK}_1\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega^{CK}_1 + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ_2^0-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma_3^{0,d}$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma_{\omega+1}^0$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ_1^1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π_2^0-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ_2^0-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i \text{ конечно}\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) \text{ невычислим}\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK}\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega_1^{CK} + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Известные результаты.

- $\mathbb{F} = \{i \,|\, \mathcal{M}_i$ конечно$\}$ - Σ^0_2-полно.
- класс d-разрешимых моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- класс d-разрешимых ω-категоричных моделей (для любой d - Тьюринговой степени) является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным.
- модели с разрешимыми теориями являются m-полными в $\Sigma^0_{\omega+1}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i)$ невычислим$\}$ Σ^1_1-полно.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega^{CK}_1\}$ является m-полным Π^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.
- $\{i \,|\, \mathcal{SR}(\mathcal{M}_i) = \omega^{CK}_1 + 1\}$ является m-полным Σ^0_2-множеством относительно $\mathcal{O}$.

Оценивая индексные множества нам необходимо знать (получить) некоторое наиболее эффективное определение класса.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma_3^{0,\mathrm{d}} \setminus \Sigma_3^{0,\mathrm{d}}$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,\mathrm{d}}_3 \setminus \Sigma^{0,\mathrm{d}}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,d}_3 \setminus \Sigma^{0,d}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,\mathrm{d}}_3 \setminus \Sigma^{0,\mathrm{d}}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,\mathrm{d}}_3 \setminus \Sigma^{0,\mathrm{d}}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Результаты.

- класс простых моделей является $\Pi^0_{\omega+2}$ m-полным множеством
- класс d-разрешимых простых моделей является $\Sigma^{0,\mathrm{d}}_3 \setminus \Sigma^{0,\mathrm{d}}_3$ m-полным множеством (для арифметической Тьюринговой степени d)
- класс ω-категоричных моделей является Π^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством
- класс ω_1-категоричных моделей является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством
- класс моделей с Эренфойхтовыми теориями является Π^1_1-полным.
- класс моделей с теориями, допускающими бесконечное число счётных моделей является Σ^1_1-полным.

Outline

- Определения

1. Верхние оценки
   - Счётно-категоричные теории.
   - Несчётно-категоричные теории.
   - Простые модели
   - Простые d-разрешимые модели
   - Модели с Эренфойхтовыми теориями
2. Нижние оценки
   - Маркеровская конструкция
   - 1-1 представление
   - Омега-скачок в нижних оценках
   - Нижняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями
   - Дополнение
3. Открытые проблемы

ω–категоричные теории.

Обозначим $\mathbb{C}\mathrm{at} = \{i \mid \mathcal{M}_i$ имеет ω-категоричная теория$\}$.

Определение

Теория T является ω-категоричной если все ω-модели T изоморфны друг другу.

Для оценки сложности на понадобится несколько более эффективное определение:

Теорема. (Рылль-Нардзевский)

T счётно-категорична $\Leftrightarrow$ алгебры Линденбаума $\mathfrak{B}_n$ конечны для всех n.

ω–категоричные теории.

Обозначим $\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \,|\, \mathcal{M}_\mathrm{i}$ имеет ω-категоричная теория$\}$.

Определение

Теория T является ω-категоричной если все ω-модели T изоморфны друг другу.

Для оценки сложности на понадобится несколько более эффективное определение:

Теорема. (Рылль-Нардзевский)

T счётно-категорична $\Leftrightarrow$ алгебры Линденбаума $\mathfrak{B}_\mathrm{n}$ конечны для всех n.

ω–категоричные теории.
Синтаксическое определение

Это синтаксическое определение выражено следующим предложением, которое истинно только для индексов тех моделей, у которых теория является ω-категоричной:

$$(\forall \mathrm{n})(\exists \mathrm{m})(\forall \mathrm{p})(\exists \mathrm{q} \leqslant \mathrm{p})(\mathrm{FV}(\varphi_\mathrm{p}) = \mathrm{FV}(\varphi_\mathrm{q}) = \{\mathrm{x}_0, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}-1}\} \to \varphi_\mathrm{p} \equiv_{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_\mathrm{i})} \varphi_\mathrm{q})$$

Поэтому имеем $\Pi^0_{\omega+2}$-множество.

ω–категоричные теории.

Синтаксическое определение

Это синтаксическое определение выражено следующим предложением, которое истинно только для индексов тех моделей, у которых теория является ω-категоричной:

$$(\forall \mathrm{n})(\exists \mathrm{m})(\forall \mathrm{p})(\exists \mathrm{q} \leqslant \mathrm{p})(\mathrm{FV}(\varphi_{\mathrm{p}}) = \mathrm{FV}(\varphi_{\mathrm{q}}) = \{\mathrm{x}_0, \dots, \mathrm{x}_{\mathrm{n}-1}\} \to \varphi_{\mathrm{p}} \equiv_{\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathrm{i}})} \varphi_{\mathrm{q}})$$

Поэтому имеем $\Pi^0_{\omega+2}$-множество.

Outline

- Определения

1. Верхние оценки
   - Счётно-категоричные теории.
   - Несчётно-категоричные теории.
   - Простые модели
   - Простые d-разрешимые модели
   - Модели с Эренфойхтовыми теориями
2. Нижние оценки
   - Маркеровская конструкция
   - 1-1 представление
   - Омега-скачок в нижних оценках
   - Нижняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями
   - Дополнение
3. Открытые проблемы

Эффективное определение?

Обозначим $\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \,|\, \mathcal{M}_{\mathrm{i}} \text{ имеет } \omega_1\text{-категоричную теорию}\}$.

Балдвин и Лахлан доказали

Теорема. (B&L, 1970)

Пусть T полная теория с бесконечными моделями. T является ω_1-категоричной $\Leftrightarrow$ T является ω-стабильной и недвукардинальной теорией.

Вопрос

Какова сложность класса моделей с ω-стабильной теорией? Π^1_1?

Эффективное определение?

Обозначим $\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \mid \mathcal{M}_\mathrm{i}$ имеет ω_1-категоричную теорию$\}$.
Балдвин и Лахлан доказали

Теорема. (B&L, 1970)

Пусть T полная теория с бесконечными моделями. T является ω_1-категоричной $\Leftrightarrow$ T является ω-стабильной и недвукардинальной теорией.

Вопрос

Какова сложность класса моделей с ω-стабильной теорией? Π^1_1?

Эффективное определение?

Обозначим $\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \mid \mathcal{M}_\mathrm{i} \text{ имеет } \omega_1\text{-категоричную теорию}\}$.
Балдвин и Лахлан доказали

Теорема. (B&L, 1970)

Пусть T полная теория с бесконечными моделями. T является ω_1-категоричной $\Leftrightarrow$ T является ω-стабильной и недвукардинальной теорией.

Вопрос

Какова сложность класса моделей с ω-стабильной теорией?
Π^1_1?

Эффективное определение?

Обозначим $\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \mid \mathcal{M}_\mathrm{i}$ имеет ω_1-категоричную теорию$\}$.
Балдвин и Лахлан доказали

Теорема. (B&L, 1970)

Пусть T полная теория с бесконечными моделями. T является ω_1-категоричной $\Leftrightarrow$ T является ω-стабильной и недвукардинальной теорией.

Вопрос

Какова сложность класса моделей с ω-стабильной теорией?
Π^1_1?

Эффективное определение?

Обозначим $\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at} = \{\mathrm{i} \mid \mathcal{M}_\mathrm{i}$ имеет ω_1-категоричную теорию$\}$. Балдвин и Лахлан доказали

Теорема. (B&L, 1970)

Пусть T полная теория с бесконечными моделями. T является ω_1-категоричной $\Leftrightarrow$ T является ω-стабильной и недвукардинальной теорией.

Вопрос

Какова сложность класса моделей с ω-стабильной теорией? Π^1_1?

Результат Еримбетова.

Но результат Еримбетова более эффективный:

Теорема. (Еримбетов, 1974, A&L)

Полная теория T тотально-трансцендента (ω-стабильна) $\Leftrightarrow$ имеет 1-кардинальную рангованную (по Морли) формулу.

Определение

Формула $\varphi(x)$ (с оной свободной переменной) является 1-кардинальной если для каждой $\mathcal{A} \models T$ мощности $|\varphi(\mathcal{A})|$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

Результат Еримбетова.

Но результат Еримбетова более эффективный:

Теорема. (Еримбетов, 1974, A&L)

Полная теория T тотально-трансцендента (ω-стабильна) $\Leftrightarrow$ имеет 1-кардинальную рангованную (по Морли) формулу.

Определение

Формула $\varphi(x)$ (с оной свободной переменной) является 1-кардинальной если для каждой $\mathcal{A} \models T$ мощности $|\varphi(\mathcal{A})|$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

Дополнительные определения.

Определение

Формула $\varphi(\mathrm{x})$ является минимальной (возможно с константами из некоторой $\mathcal{A}$ теории T) если для каждой $\psi(\mathrm{x})$ либо $[\varphi\&\psi](\mathcal{A})$ либо $[\varphi\&\neg\psi](\mathcal{A})$ конечно.

Определение

Формула $\varphi(\mathrm{x})$ является сильно-минимальной (возможно с константами из некоторой $\mathcal{A}$ теории T) если она минимальна в каждом элементарном расширении $\mathcal{A}$.

Дополнительные определения.

Определение

Формула $\varphi(\mathrm{x})$ является минимальной (возможно с константами из некоторой $\mathcal{A}$ теории T) если для каждой $\psi(\mathrm{x})$ либо $[\varphi\&\psi](\mathcal{A})$ либо $[\varphi\&\neg\psi](\mathcal{A})$ конечно.

Определение

Формула $\varphi(\mathrm{x})$ является сильно-минимальной (возможно с константами из некоторой $\mathcal{A}$ теории T) если она минимальна в каждом элементарном расширении $\mathcal{A}$.

КРИТЕРИЙ ЕРИМБЕТОВА.

В действительности нет необходимости пользоваться определением сильно-минимальной формулы, т.к.

Теорема. (Folklore)

Если теория T не имеет Воотовых пар, тогда минимальная формула является сильно-минимальной.

Зафиксируем критерий:

Критерий ω_1-категоричности

Полная теория T с бесконечными моделями является несчётно-категоричной тогда и только тогда, когда существует минимальная 1-кардинальная формула (с константами из некоторой модели T).

Критерий Еримбетова.

В действительности нет необходимости пользоваться определением сильно-минимальной формулы, т.к.

Теорема. (Folklore)

Если теория T не имеет Вотовых пар, тогда минимальная формула является сильно-минимальной.

Зафиксируем критерий:

Критерий ω_1-категоричности

Полная теория T с бесконечными моделями является несчётно-категоричной тогда и только тогда, когда существует минимальная 1-кардинальная формула (с константами из некоторой модели T).

КРИТЕРИЙ ЕРИМБЕТОВА.

В действительности нет необходимости пользоваться определением сильно-минимальной формулы, т.к.

Теорема. (Folklore)

Если теория T не имеет Вoотовых пар, тогда минимальная формула является сильно-минимальной.

Зафиксируем критерий:

Критерий ω_1-категоричности

Полная теория T с бесконечными моделями является несчётно-категоричной тогда и только тогда, когда существует минимальная 1-кардинальная формула (с константами из некоторой модели T).

Верхняя оценка для ω_1-категоричных моделей.
Доказательство.

Теорема. (П.)

$\mathbb{U}\mathrm{n}\mathbb{C}\mathrm{at}$ является $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством.

Доказательство: Что значит, что формула минимальна?

$$\mathrm{M}(\mathrm{i},\mathrm{j},\bar{\mathrm{a}}) := (\forall \mathrm{k})(\exists \mathrm{n})\ (\mathcal{M}_\mathrm{i} \models ((\exists^{\leqslant \mathrm{n}}\mathrm{x})(\varphi_\mathrm{j}(\mathrm{x},\bar{\mathrm{a}})\&\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{x}))\vee (\exists^{\leqslant \mathrm{n}}\mathrm{x})(\varphi_\mathrm{j}(\mathrm{x},\bar{\mathrm{a}})\&\neg\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{x}))))$$

Это предложение задаёт Π^0_ω-множество.

Верхняя оценка для ω_1-категоричных моделей.

Доказательство, продолжение

Рассмотрим множество Γ формул сигнатуры σ обогащённой новым унарным предикатным символом P.

$\Gamma =$
$\{$предложения определяющие P как элементарную подмодель$\} \cup$
$\{P(a_t) | a_t \in \bar{a}\} \cup \{\exists^{\geqslant m} x \varphi_j(x, \bar{a}) | m \in N\} \cup \{\forall x(\varphi_j(x, \bar{a}) \to P(x))\}$

Теперь рассмотрим $Th(\mathcal{M}_i) \cup \Gamma$. Оно выполнимо, тогда и только тогда, когда мы имеем два кардинала. Поэтому мы можем написать предложение, которое утверждает, что φ_j является 1-кардинальной формулой: $Th(\mathcal{M}_i) \cup \Gamma \vdash$.

Верхняя оценка для ω_1-категоричных моделей.

Доказательство, продолжение

Рассмотрим множество Γ формул сигнатуры σ обогащённой новым унарным предикатным символом P.

$\Gamma =$
$\{$предложения определяющие P как элементарную подмодель$\} \cup$
$\{P(a_t) | a_t \in \bar{a}\} \cup \{\exists^{\geqslant m} x \varphi_j(x, \bar{a}) | m \in N\} \cup \{\forall x(\varphi_j(x, \bar{a}) \to P(x))\}$

Теперь рассмотрим $Th(\mathcal{M}_i) \cup \Gamma$. Оно выполнимо, тогда и только тогда, когда мы имеем два кардинала. Поэтому мы можем написать предложение, которое утверждает, что φ_j является 1-кардинальной формулой: $Th(\mathcal{M}_i) \cup \Gamma \vdash$.

Верхняя оценка для ω_1-категоричных моделей.

Доказательство, продолжение.

$$
\begin{aligned}
OC(i,j,\bar{a}) := (\exists q)(\forall k \in D_q)\Big(&(\text{"}\varphi_k \text{является } \sigma^{\bar{a}} \cup \{P\} \text{ формулой"}) \ \& \\
&(\text{"}\varphi_k \text{аксиома ИП"} \vee (\varphi_k \in \Gamma) \vee \mathcal{M}_i \models \forall \bar{x}\varphi_k(\bar{x}) \vee \\
&\text{"}\varphi_k \text{является следствием предыдущих"})\& \\
&\&(\varphi_{\max(D_q)} = (\varphi_0 \& \neg\varphi_0))\&A'\Big)
\end{aligned}
$$

Это Σ^0_ω-предложение.

$UnCat(i) = (\exists\bar{a})(\exists j)(M(i,j,a)\&OC(i,j,a))$

Это предложение задаёт $\Sigma^0_{\omega+1}$-множество.

Верхняя оценка для ω_1-категоричных моделей.

Доказательство, продолжение.

$$\mathrm{OC}(\mathrm{i},\mathrm{j},\bar{\mathrm{a}}) := (\exists \mathrm{q})(\forall \mathrm{k} \in \mathrm{D}_\mathrm{q})\Big((\text{"}\varphi_\mathrm{k}\text{является } \sigma^{\bar{\mathrm{a}}} \cup \{\mathrm{P}\} \text{ формулой"}) \ \&$$

$$(\text{"}\varphi_\mathrm{k}\text{аксиома ИП"} \vee (\varphi_\mathrm{k} \in \Gamma) \vee \mathcal{M}_\mathrm{i} \models \forall \bar{\mathrm{x}} \varphi_\mathrm{k}(\bar{\mathrm{x}}) \vee$$

$$\text{"}\varphi_\mathrm{k}\text{является следствием предыдущих"})\&$$

$$\&(\varphi_{\max(\mathrm{D}_\mathrm{q})} = (\varphi_0 \& \neg \varphi_0))\&\mathrm{A}'\Big)$$

Это Σ^0_ω-предложение.

$\mathrm{UnCat}(\mathrm{i}) = (\exists \bar{\mathrm{a}})(\exists \mathrm{j})(\mathrm{M}(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{a})\&\mathrm{OC}(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{a}))$

Это предложение задаёт $\Sigma^0_{\omega+1}$-множество.

Outline

Верхняя оценка для простых моделей.

Известно, что модель проста, если и только если она счётна и атомна.

Определение

Модель $\mathcal{A}$ атомна если всякий n-тип кортежа $\bar{a} \in |\mathcal{A}^n|$ $p_{\bar{a}}(\bar{x})$ является главным (т.е. существует полная формула $\varphi(\bar{x})$ из которой следуют все формулы типа).

Если мы рассмотрим предложение, утверждающее, что модель $\mathcal{M}_i$ атомна, мы увидим $\Pi^0_{\omega+2}$-формулу:

$$\mathrm{Prime}(i) = \forall \bar{a} \exists j \Big(\mathcal{M}_i \models \varphi_j(\bar{a}) \& \forall k \big[(\mathcal{M}_i \models \varphi_k(\bar{a})) \rightarrow (\mathcal{M}_i \models \forall \bar{x} (\varphi_j(\bar{x}) \rightarrow \varphi_k(\bar{x}))) \big] \Big)$$

Outline

Верхняя оценка для простых d-разрешимых моделей.

Пусть d-арифметическая Тьюрингова степень. Тогда предыдущее утверждение о том, что модель является простой для d-разрешимых моделей имеет сложность $\Pi_3^{0,d}$, т.к. отношение "быть истинным на модели"становится d-вычислимым.

В то же время результат Е.Б. Фокиной говорит о том, что сложность индексного множества d-разрешимых моделей – в точности $\Sigma_3^{0,d}$.

Поэтому мы получаем $\Sigma_3^{0,d} \setminus \Sigma_3^{0,d}$ множество.

Outline

Верхняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями.

Определение

Модель $\mathcal{A}$ имеет Эренфойхтову теорию, если $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ допускает конечное число счётных моделей.

Ясно, что в таком виде определение достаточно сложно. Поэтому воспользуемся синтаксической характеризацией Судоплатова для построения верхней оценки. Обозначим $\mathrm{S}(\mathrm{T})$ – множество всех типов теории T.

Определение

Теория T мала, если $|\mathrm{S}(\mathrm{T})| \leqslant \omega$.
Тип $\mathrm{p} \in \mathrm{S}(\mathrm{T})$ называется властным типом теории T, если для любой модели $\mathcal{A} \models \mathrm{p}$ верно $\mathcal{A} \models \mathrm{S}(\mathrm{T})$.

Верхняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями.

Определение

Модель $\mathcal{A}$ имеет Эренфойхтову теорию, если $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ допускает конечное число счётных моделей.

Ясно, что в таком виде определение достаточно сложно. Поэтому воспользуемся синтаксической характеризацией Судоплатова для построения верхней оценки. Обозначим $\mathrm{S(T)}$ – множество всех типов теории T.

Определение

Теория T мала, если $|\mathrm{S(T)}| \leqslant \omega$.
Тип $\mathrm{p} \in \mathrm{S(T)}$ называется властным типом теории T, если для любой модели $\mathcal{A} \models \mathrm{p}$ верно $\mathcal{A} \models \mathrm{S(T)}$.

Верхняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями.

Характеризация Судоплатова

Теорема (Судоплатов)

Теория T имеет конечное число счётных моделей тогда и только тогда, когда T – мала, $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$ и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathrm{M}}) < \omega$, для всех $\widetilde{\mathrm{M}} \in \mathrm{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}$.

Здесь $\mathrm{RK}(T) = \langle \mathrm{PM}, \leqslant_{\mathrm{RK}} \rangle$, где PM – множество типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$, а предпорядок $\mathcal{M}_p \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$ определяется как $\mathcal{M}_p \preccurlyeq \mathcal{M}_q$.

Пусть $\widetilde{\mathrm{M}} \in \mathrm{RK}(T)/\sim_{\mathrm{RK}}$ состоит из типов изоморфизма эквивалентных $\sim_{\mathrm{RK}}$ моделей $\mathcal{M}_{p_1}, \mathcal{M}_{p_2}, \ldots, \mathcal{M}_{p_n}$. Тогда $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathrm{M}})$ определяется как число классов эквивалентности моделей, предельных над некоторым типом p_i, т.е. моделей, являющихся объединением элементарной цепочки $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\omega}$ моделей, каждая из которых изоморфна $\mathcal{M}_{p_i}$.

Верхняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями.

Π^1_1 множество

Применение характеризации Судоплатова позволяет оценить сверху множество моделей, имеющих Эренфойхтовы теории, как Π^1_1. Т.к. упомянутая теорема позволяет сформулировать свойство Эренфойхтовости с помощью некоторого Π^1_1-предложения о существовании определённой конфигурации типов. Т.е. можно дать такое определение Эренфойхтовости, которое вообще не использует понятие модели, но использует понятие типа.

Нижние оценки.

Метод сведения к различным сигнатурам.

Гончаровым в 1980 был предложен функтор из категории вычислимых моделей бесконечной вычислимой сигнатуры в категорию вычислимых графов. Подробное рассмотрение этого функтора позволяет доказать теорему:

Теорема. (Павловский, Фокина)

Для любой вычислимой сигнатуры σ для любой модели $\mathcal{M}$ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, что:

- $\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;
- $\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима (в случае, когда σ конечная сигнатура);
- $(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \lambda) = (\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), \lambda)$, $\lambda \in \{\omega, \omega_1\}$;
- $\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста (в случае, когда σ конечная).

Нижние оценки.

Метод сведения к различным сигнатурам.

Гончаровым в 1980 был предложен функтор из категории вычислимых моделей бесконечной вычислимой сигнатуры в категорию вычислимых графов. Подробное рассмотрение этого функтора позволяет доказать теорему:

Теорема. (Павловский, Фокина)

Для любой вычислимой сигнатуры σ для любой модели $\mathcal{M}$ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, что:

- $\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;
- $\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима (в случае, когда σ конечная сигнатура);
- $(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \lambda) = (\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), \lambda)$, $\lambda \in \{\omega, \omega_1\}$;
- $\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста (в случае, когда σ конечная).

Нижние оценки.

Метод сведения к различным сигнатурам.

Гончаровым в 1980 был предложен функтор из категории вычислимых моделей бесконечной вычислимой сигнатуры в категорию вычислимых графов. Подробное рассмотрение этого функтора позволяет доказать теорему:

Теорема. (Павловский, Фокина)

Для любой вычислимой сигнатуры σ для любой модели $\mathcal{M}$ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, что:

- $\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;
- $\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима (в случае, когда σ конечная сигнатура);
- $(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \lambda) = (\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), \lambda)$, $\lambda \in \{\omega, \omega_1\}$;
- $\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста (в случае, когда σ конечная).

Нижние оценки.

Метод сведения к различным сигнатурам.

Гончаровым в 1980 был предложен функтор из категории вычислимых моделей бесконечной вычислимой сигнатуры в категорию вычислимых графов. Подробное рассмотрение этого функтора позволяет доказать теорему:

Теорема. (Павловский, Фокина)

Для любой вычислимой сигнатуры σ для любой модели $\mathcal{M}$ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, что:

- $\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;
- $\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима (в случае, когда σ конечная сигнатура);
- $(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \lambda) = (\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), \lambda)$, $\lambda \in \{\omega, \omega_1\}$;
- $\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста (в случае, когда σ конечная).

Нижние оценки.
Метод сведения к различным сигнатурам.

Гончаровым в 1980 был предложен функтор из категории вычислимых моделей бесконечной вычислимой сигнатуры в категорию вычислимых графов. Подробное рассмотрение этого функтора позволяет доказать теорему:

Теорема. (Павловский, Фокина)

Для любой вычислимой сигнатуры σ для любой модели $\mathcal{M}$ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, что:

- $\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;
- $\mathcal{M}$ d-разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ d-разрешима (в случае, когда σ конечная сигнатура);
- $(\mathrm{Th}(\mathcal{M}), \lambda) = (\mathrm{Th}(\mathcal{M}'), \lambda)$, $\lambda \in \{\omega, \omega_1\}$;
- $\mathcal{M}$ проста $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ проста (в случае, когда σ конечная).

Нижние оценки.

Универсальный метод получения нижних оценок.

Обратимся теперь к нижним оценкам. Метод, предложенный Гончаровым и Хусаиновым, использования маркеровских расширений и леммы об однозначном представлении позволяет получить ряд нижних оценок для т.н. маркеровских свойств.

Пусть $\mathcal{M}$ модель сигнатуры σ с бесконечным-кобесконечным предикатом $\mathrm{P}^{\mathrm{k}} \in \sigma$.

Нижние оценки.

Универсальный метод получения нижних оценок.

Обратимся теперь к нижним оценкам. Метод, предложенный Гончаровым и Хусаиновым, использования маркеровских расширений и леммы об однозначном представлении позволяет получить ряд нижних оценок для т.н. маркеровских свойств.

Пусть $\mathcal{M}$ модель сигнатуры σ с бесконечным-кобесконечным предикатом $\mathrm{P}^{\mathrm{k}} \in \sigma$.

Outline

Определение Маркеровского расширения

Определение

Маркеровским $\exists$-расширением предиката P местности k является предикат $P_\exists$ местности $k+1$. Пусть X – бесконечное множество, непересекающееся с M. Тогда $P_\exists$, определяется так:

1$\exists$) Если $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$, тогда $P(a_1, \ldots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2$\exists$) Для любых $a \in X$ существует единственный k-кортеж $(a_1, \ldots, a_k)$ т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

3$\exists$) Если $P(a_1, \ldots, a_k)$, тогда существует единственный a т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение определяется подобным образом (через отрицания).

Определение Маркеровского расширения

Определение

Маркеровским $\exists$-расширением предиката P местности k является предикат $P_\exists$ местности $k+1$. Пусть X – бесконечное множество, непересекающееся с M. Тогда $P_\exists$, определяется так:

1∃) Если $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$, тогда $P(a_1, \ldots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2∃) Для любых $a \in X$ существует единственный k-кортеж $(a_1, \ldots, a_k)$ т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

3∃) Если $P(a_1, \ldots, a_k)$, тогда существует единственный a т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение определяется подобным образом (через отрицания).

Определение Маркеровского расширения

Определение

Маркеровским $\exists$-расширением предиката P местности k является предикат $P_\exists$ местности $k+1$. Пусть X – бесконечное множество, непересекающееся с M. Тогда $P_\exists$, определяется так:

1$\exists$) Если $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$, тогда $P(a_1, \ldots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2$\exists$) Для любых $a \in X$ существует единственный k-кортеж $(a_1, \ldots, a_k)$ т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

3$\exists$) Если $P(a_1, \ldots, a_k)$, тогда существует единственный a т.ч. $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение определяется подобным образом (через отрицания).

Определение Маркеровского расширения

Определение

Маркеровским $\exists$-расширением предиката P местности k является предикат $P_{\exists}$ местности $k+1$. Пусть X – бесконечное множество, непересекающееся с M. Тогда $P_{\exists}$, определяется так:

1∃) Если $P_{\exists}(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$, тогда $P(a_1, \ldots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2∃) Для любых $a \in X$ существует единственный k-кортеж $(a_1, \ldots, a_k)$ т.ч. $P_{\exists}(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

3∃) Если $P(a_1, \ldots, a_k)$, тогда существует единственный a т.ч. $P_{\exists}(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение определяется подобным образом (через отрицания).

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское расширение.

Маркеровское расширение сохраняет множество интересных свойств:

- ω-, ω_1- категоричность, почти сильно-минимальность теорий
- простоту, однородность модели
- определимость

"Сохраняет"также подразумевает, что если модель не обладает этим свойством, то её расширение, также не обладает этим свойством.

Эта сохраняемость является следствием некоторой алгебраичности расширения.

Маркеровское свойство.

Говорим, что свойство модели является Маркеровским если оно сохраняется при Маркеровском расширении, и существуют две модели $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ над ω в сигнатуре $\sigma = \{\mathrm{P}, \ldots\}$ т.ч.:

- обе вычислимы
- для одной модели свойство выполняется, а на другой опровергается.
- $\mathrm{P}^{\mathcal{A}}$, $\mathrm{P}^{\mathcal{B}}$ являются бесконечными-кобесконечными подмножествами ω.

Несложно показать, что упомянутые на предыдущем слайде свойства являются Маркеровскими.

Маркеровское свойство.

Говорим, что свойство модели является Маркеровским если оно сохраняется при Маркеровском расширении, и существуют две модели $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ над ω в сигнатуре $\sigma = \{\mathrm{P}, \ldots\}$ т.ч.:

- обе вычислимы
- для одной модели свойство выполняется, а на другой опровергается.
- $\mathrm{P}^{\mathcal{A}}$, $\mathrm{P}^{\mathcal{B}}$ являются бесконечными-кобесконечными подмножествами ω.

Несложно показать, что упомянутые на предыдущем слайде свойства являются Маркеровскими.

Маркеровское свойство.

Говорим, что свойство модели является Маркеровским если оно сохраняется при Маркеровском расширении, и существуют две модели $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ над ω в сигнатуре $\sigma = \{\mathrm{P}, \dots\}$ т.ч.:

- обе вычислимы
- для одной модели свойство выполняется, а на другой опровергается.
- $\mathrm{P}^{\mathcal{A}}$, $\mathrm{P}^{\mathcal{B}}$ являются бесконечными-кобесконечными подмножествами ω.

Несложно показать, что упомянутые на предыдущем слайде свойства являются Маркеровскими.

Outline

- Определения

1. Верхние оценки
   - Счётно-категоричные теории.
   - Несчётно-категоричные теории.
   - Простые модели
   - Простые d-разрешимые модели
   - Модели с Эренфойхтовыми теориями

2. Нижние оценки
   - Маркеровская конструкция
   - 1-1 представление
   - Омега-скачок в нижних оценках
   - Нижняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями
   - Дополнение

3. Открытые проблемы

1-1 представление.

Определение

Σ^0_2–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a\rangle$ т.ч. $\neg Q(n, a, b)$.
- для всех $\langle n, a\rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n, a, b)$.

1-1 представление.

Определение

Σ_2^0–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n,a,b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n,a,b)$, $\Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b Q(n,a,b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ т.ч. $\neg Q(n,a,b)$.
- для всех $\langle n, a \rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n,a,b)$, либо $\forall b Q(n,a,b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n,a,b)$.

1-1 представление.

Определение

Σ_2^0–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ т.ч. $\neg Q(n, a, b)$.
- для всех $\langle n, a \rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n, a, b)$.

1-1 представление.

Определение

Σ^0_2–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow$ $\exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ т.ч. $\neg Q(n, a, b)$.
- для всех $\langle n, a \rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n, a, b)$.

1-1 представление.

Определение

Σ^0_2–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow$ $\exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ т.ч. $\neg Q(n, a, b)$.
- для всех $\langle n, a \rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n, a, b)$.

1-1 представление.

Определение

Σ^0_2–множество P называется однозначно представимым, если существует вычислимый предикат $Q \subset \omega^3$ который удовлетворяет:

- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow n \in P$.
- для любых $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, $\Leftrightarrow$ $\exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$
- для каждого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ т.ч. $\neg Q(n, a, b)$.
- для всех $\langle n, a \rangle$ либо $\exists^{=1} b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.
- для всех a существует единственный n т.ч. $\forall b Q(n, a, b)$.

Использование 1-1 представимости.

Лемма об однозначном представлении.

Пусть A кобесконечное $\Sigma_2^{0,X}$-множество которое содержит бесконечное X-вычислимое подмножество S т.ч. $A \setminus S$ бесконечно. Тогда существует X-вычислимое множество Q т.ч. Q является однозначным представлением A.

Мы используем эту лемму для понижения алгоритмической сложности моделей.
К примеру, имеем $\emptyset^{(n)}$-вычислимую простую модель, тогда её можно свести к $\emptyset^{(n-1)}$-вычислимой простой модели.

Равномерное применение.

Теорема. (Фокина)

Пусть d арифметическая Тьюрингова степень. Пусть $\mathcal{M}_0, \dots \mathcal{M}_n, \dots$ вычислимая последовательность d′-вычислимых моделей, т.ч. в каждой $\mathcal{M}_i$ для каждого $P \in \sigma$ существует бесконечное подмножество $S_{i,P}$, равномерно вычислимое по i и P, т.ч. $P \setminus S_{i,P}$ бесконечно. Тогда существует вычислимая последовательность $(\mathcal{M}_0)_{\forall\exists}, \dots, (\mathcal{M}_n)_{\forall\exists}, \dots$ d-вычислимых моделей, т.ч. для всех i и $P' \in \sigma_{\forall\exists}$ существует бесконечное подмножество $S_{i,P'} \subseteq P$, равномерно вычислимое по i и P', т.ч. $P' \setminus S_{i,P'}$ бесконечно.

Outline

Достижение $\emptyset^{(\omega)}$ нижних оценок.

Используя этот метод мы немедленно получаем Δ^0_ω нижнюю оценку для таких классов, как:

- модели с ω-категоричными теориями
- модели с ω_1-категоричными теориями
- простые модели

То же выполняется и для Маркеровских свойств. Этот результат и конструкция сведения к сигнатуре графов позволяют получить те же нижние оценки для произвольных нетривиальных сигнатур, т.е., сигнатур содержащих по крайней мере один предикатный символ местности $\geqslant 2$.

Достижение $\emptyset^{(\omega)}$ нижних оценок.

Используя этот метод мы немедленно получаем Δ^0_ω нижнюю оценку для таких классов, как:

- модели с ω-категоричными теориями
- модели с ω_1-категоричными теориями
- простые модели

То же выполняется и для Маркеровских свойств. Этот результат и конструкция сведения к сигнатуре графов позволяют получить те же нижние оценки для произвольных нетривиальных сигнатур, т.е., сигнатур содержащих по крайней мере один предикатный символ местности $\geqslant 2$.

Достижение $\emptyset^{(\omega)}$ нижних оценок.

Используя этот метод мы немедленно получаем Δ^0_ω нижнюю оценку для таких классов, как:

- модели с ω-категоричными теориями
- модели с ω_1-категоричными теориями
- простые модели

То же выполняется и для Маркеровских свойств. Этот результат и конструкция сведения к сигнатуре графов позволяют получить те же нижние оценки для произвольных нетривиальных сигнатур, т.е., сигнатур содержащих по крайней мере один предикатный символ местности $\geqslant 2$.

Достижение $\emptyset^{(\omega)}$ нижних оценок.

Используя этот метод мы немедленно получаем Δ^0_ω нижнюю оценку для таких классов, как:

- модели с ω-категоричными теориями
- модели с ω_1-категоричными теориями
- простые модели

То же выполняется и для Маркеровских свойств. Этот результат и конструкция сведения к сигнатуре графов позволяют получить те же нижние оценки для произвольных нетривиальных сигнатур, т.е., сигнатур содержащих по крайней мере один предикатный символ местности $\geqslant 2$.

Достижение $\emptyset^{(\omega)}$ нижних оценок.

Используя этот метод мы немедленно получаем Δ^0_ω нижнюю оценку для таких классов, как:

- модели с ω-категоричными теориями
- модели с ω_1-категоричными теориями
- простые модели

То же выполняется и для Маркеровских свойств. Этот результат и конструкция сведения к сигнатуре графов позволяют получить те же нижние оценки для произвольных нетривиальных сигнатур, т.е., сигнатур содержащих по крайней мере один предикатный символ местности $\geqslant 2$.

Outline

Нижняя оценка для моделей с Эренфойхтовыми теориями.

Для данного класса нижняя оценка строится на основе доказательства Леммпа и Сламана Π^1_1-полноты свойства Эренфойхтовости разрешимых теорий.
Для этого рассматривается последовательность вычислимых бесконечных деревьев Рида $\mathrm{Tr}_e \in \omega^{<\omega}$, $e \in \omega$. По каждому такому дереву можно построить теорию с тремя счётными вычислимыми моделями для дерева, не имеющего бесконечных путей, и теорию с бесконечным числом счётных моделей для дерева с бесконечными путями. Поскольку оба типа теорий будут разрешимыми (т.к. рекурсивно-перечислимы и полны в виду конструкции Рида), то можно взять их разрешимые модели, которые образуют необходимую последовательность, подтверждающую нижнюю оценку Π^1_1.
Из этого результата сразу следует точная оценка для класса

Outline

Насыщенные модели.

Верхняя оценка: имеем реализацию для каждого типа над конечным числом констант некоторой модели. Это Π^1_1-условие.

В статье Винокурова Н.С. (СМЖ, 2006) утверждается, что универсальные модели, как минимум имеют сложность Σ^1_1.

Открытые проблемы.

Всё ещё не получены точные оценки для следующих важных классов:

- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ – допускает разрешимое представление$\}$ ($\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ – допускает n-разрешимое представление$\}$)
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ – автоустойчива$\}$
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ – имеет (бес)конечную алгоритмическую размерность$\}$
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_{\mathrm{i}}$ – Δ_α-автоустойчива$\}$

Открытые проблемы.

Всё ещё не получены точные оценки для следующих важных классов:

- $\{i | \mathcal{M}_i$ – допускает разрешимое представление$\}$ ($\{i | \mathcal{M}_i$ – допускает n-разрешимое представление$\}$)
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – автоустойчива$\}$
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – имеет (бес)конечную алгоритмическую размерность$\}$
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – Δ_α-автоустойчива$\}$

Открытые проблемы.

Всё ещё не получены точные оценки для следующих важных классов:

- $\{i | \mathcal{M}_i$ – допускает разрешимое представление$\}$ $(\{i | \mathcal{M}_i$ – допускает n-разрешимое представление$\})$
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – автоустойчива$\}$
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – имеет (бес)конечную алгоритмическую размерность$\}$
- $\{i | \mathcal{M}_i$ – Δ_α-автоустойчива$\}$

Открытые проблемы.

Всё ещё не получены точные оценки для следующих важных классов:

- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_\mathrm{i}$ – допускает разрешимое представление$\}$ ($\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_\mathrm{i}$ – допускает n-разрешимое представление$\}$)
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_\mathrm{i}$ – автоустойчива$\}$
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_\mathrm{i}$ – имеет (бес)конечную алгоритмическую размерность$\}$
- $\{\mathrm{i} | \mathcal{M}_\mathrm{i}$ – Δ_α-автоустойчива$\}$

Цитированная литература

римбетов М.М. Еримбетов. О полных теориях с 1-кардинальной формулой. А&Л, 14, 1975.

L&B J.T.Baldwin, A.H.Lachlan. On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, V.36, N1, March 1971, P.79-96.

инокуров Н.С. Винокуров. Индексные множества классов автоматных структур, СМЖ, 2006.

Цитированная литература

римбетов М.М. Еримбетов. О полных теориях с 1-кардинальной формулой. А&Л, 14, 1975.

L&B J.T.Baldwin, A.H.Lachlan. On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, V.36, N1, March 1971, P.79-96.

инокуров Н.С. Винокуров. Индексные множества классов автоматных структур, СМЖ, 2006.

Цитированная литература

римбетов М.М. Еримбетов. О полных теориях с 1-кардинальной формулой. А&Л, 14, 1975.

L&B J.T.Baldwin, A.H.Lachlan. On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, V.36, N1, March 1971, P.79-96.

инокуров Н.С. Винокуров. Индексные множества классов автоматных структур, СМЖ, 2006.

Благодарности.

Спасибо за внимание!