МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **КВАНТОВОЙ ОПТИКИ**

Направление подготовки **03.04.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **МАГИСТРАТУРА**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Седова Егора Валентиновича

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы **«Изучение когерентных структур на основе численных алгоритмов нелинейного преобразования Фурье для нелинейного уравнения Шредингера»**

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН

Главный научный сотрудник, Институт автоматики и электрометрии СО РАН

Шалагин А. М. /……..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«……»……20…г.

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН

Ректор НГУ

Федорук М.П. /……..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«……»……20…г.

Дата защиты: «……»……20…г.

Новосибирск, 2019

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Теория 7

1.1. Нелинейные эффекты в оптических волокнах 7

1.2. Нелинейное преобразование Фурье 8

1.2.1. Нелинейное уравнение Шредингера 8

1.2.2. Задача Захарова-Шабата 9

1.2.3. Схема нелинейного преобразования Фурье 13

1.2.4. Солитоны 14

1.2.5. Аналитические решения 16

1.2.6. Критерий существования дискретных собственных значений 18

1.3. Численные методы 20

1.3.1. Метод Боффетты-Осборна определения данных рассеяния 20

1.3.2. Töplitz inner bordering метод 23

1.3.3. N-солитонный сигнал 25

1.3.4. Метод Фурье-коллокаций нахождения нелинейного спектра 28

1.3.5. Интегральная формула Коши 30

Глава 2. Исследование солитонной составляющей в стандартных оптических сигналов 34

2.1. Методика 34

2.1.1. Модуляция 38

2.1.2. Оценка качества передачи сигнала 39

2.2. OFDM сигнал 39

2.2.1. Формирование сигнала 39

2.2.2. Результаты 41

2.3. WDM сигнал 48

2.3.1. Формирование сигнала 48

2.3.2. Результаты 50

Заключение 55

Список литературы 57

Введение

Волоконно-оптические системы связи составляют основу мировой коммуникационной инфраструктуры, поскольку они обеспечивают 99% глобального трафика данных. С тех пор, как в 1970-х годах появились волоконно-оптические линии связи, многие технологические достижения, такие как волоконные усилители с эрбиевым покрытием (EDFA), мультиплексирование с разделением по длинам волн (WDM), управление дисперсией, прямое исправление ошибок, усиление комбинационного рассеяния и т.д., трафик данных экспоненциально рос. Продолжающийся экспоненциальный рост сетевого трафика подталкивает текущую технологию, скорость передачи данных которой увеличивалась несколько десятилетий, к её пределам. Системы и сети оптической передачи пятого поколения работают с когерентным детектированием, улучшенными многоуровневыми форматами модуляции и методами цифровой обработки сигналов, с канальными скоростями, превышающими 100 Гбит/с. Ключом к прорыву было уменьшение влияния наиболее важных линейных искажений, таких как дисперсия хроматического волокна и моды поляризации. В современных когерентных волоконно-оптических системах входной сигнал восстанавливается с точностью, допускаемой шумом канала и остаточными эффектами передачи, которые не выравниваются методами цифровой обработки сигналов. Таким образом, шум и нелинейность становятся ключевыми факторами, которые ограничивают работу когерентных систем.

Нелинейные эффекты в оптическом волокне в настоящее время являются основным ограничивающим фактором в современных волоконно-оптических системах связи. Большинство используемых сегодня технологий передачи данных не могут учитывать нелинейные эффекты, поскольку они изначально разрабатывались для линейных (проводных или беспроводных) каналов связи. Поэтому воздействие нелинейности волокна, хоть оно физически понятно, часто ошибочно воспринимается как случайный шум. За последние 40 лет существенные улучшения в скорости передачи данных были получены путём пошаговых изменений в общей парадигме линейной передачи. Тем не менее, есть много свидетельств того, что эта тенденция

закончится в течение следующего десятилетия. Таким образом, существует явная необходимость в радикально других подходах к кодированию, передаче и обработке информации, учитывающих нелинейные свойства оптического волокна.

Одним тревожным фактором является то, что спектральная эффективность волоконно-оптических каналов ограничена существующими методами и начинает уменьшаться при высоких мощностях сигнала из-за наличия нелинейности волокна. Даже с многомодовыми / многоядерными оптоволоконными системами, которые были недавно предложены в качестве альтернатив для увеличения спектральной эффективности, нельзя избежать влияния нелинейности. Таким образом, без радикальных новшеств в инфраструктуре физической сети мы столкнемся с тем, что часто называют кризисом пропускной способности. Признание этого факта было точкой, с которой начинались поиски альтернативных решений. В настоящее время очевидна необходимость в по-настоящему новой парадигме нелинейной коммуникации, включающей новые методы кодирования, передачи и обработки информации. Проще говоря, емкость нелинейного оптического волокна еще не полностью использована.

В последние годы были предприняты значительные усилия по уменьшению негативного воздействия нелинейности волокна с помощью различных методов компенсации [1]. Однако при развёртывании и использовании этих методов существуют многочисленные проблемы, поскольку большинство технологий, используемых для оптического волокна, изначально было разработано для линейных каналов. В рамках такой «линейной» идеологии нелинейность играет единственную роль искажения сигнала. Поиск оптимальной конструкции нелинейного канала передачи и способа использования нелинейности «конструктивным» образом имеет долгую историю. Интересный подход был предложен Hasegawa и Nyu [2], который выдвинул идею использования нелинейного спектра сигнала. Эта концепция известна как «eigenvalue communications», потому что информация была закодирована с использованием дискретных собственных значений, возникающих при разложении сигнала. Эта идея в последнее время вновь стала использоваться, как принципиально новая нелинейная коммуникационная техника, ос-

нованная на свойстве интегрируемости нелинейного канала и связанного с этим нелинейного преобразования Фурье [3]. Основной целью этого предложения является практическая разработка парадигмы «интегрируемой оптической передачи» для сверхвысокоскоростных оптических систем связи на основе применения нелинейного преобразования Фурье (НПФ) для кодирования и обработки сигналов. Успешная реализация данных идей должна дать однозначный ответ на вопросы: «Каков истинный предел пропускной способности нелинейного волоконного канала?» и «Как мы можем достичь этого?». Это означает, что когда ограничения, связанные с «линейными методами», уменьшаются, мы ожидаем увеличения «продуктивности» волокна, при этом нелинейность работает как конструктивный элемент для повышения скорости передачи.

В рамках данной работы, мы пытаемся сделать первый шаг в поиске применения нелинейного преобразования Фурье в современных оптических линиях связи. Целью работы является применение нелинейного преобразования Фурье к стандартным оптическим сигналам, таких как OFDM и WDM, и изучение характеристик данных сигналов с точки зрения нелинейной парадигмы распространения сигнала. Также сигналы исследуются на предмет существования в них когерентных структур — солитонов, определяются критерии их существования и их влияние на распространение. Для исследования используются существующие численные алгоритмы нелинейного преобразования Фурье, а также их модификации.

Глава 1

Теория

1.1. Нелинейные эффекты в оптических волокнах

Как в большинстве физических систем, так и волоконной оптике, существуют нелинейные эффекты, порождающие эффекты и явления, влияющие на распространение сигнала и приводящие к потерям информации в оптических линиях связи. Нелинейность волокна является неотъемлемым свойством материальной среды, зависящим от уровня передаваемой мощности. Увеличение мощности сигнала было необходимым для использования WDM систем. Как следствие, возникла необходимость учитывать нелинейные эффекты, которые становятся ощутимыми, когда интенсивность излучения становится выше пороговой, а также при распространении на большое расстояние, когда влияние нелинейности волокна накапливается.

Нелинейности могут быть разделены на две группы: связанные с эффектами рассеяния (рассеяние Рамана и Бриллюэна) и эффектами Керра. При рассеянии лазерный импульс может взаимодействовать с акустическими фононами (вынужденное обратное рассеяние Бриллюэна-Мандельштама) и оптическими фононами (вынужденное рамановское или комбинационное рассеяние). При таком взаимодействии сигнал смещается в область более длинных волн.

Эффект Керра заключается в изменении коэффициента преломления среды под действием электрического поля. В таком случае, показатель преломления будет зависеть от интенсивности излучения, и будут возникать такие эффекты, как фазовая самомодуляция, фазовая кросс-модуляция, модуляционная неустойчивость, четырехволновое смешение, а также формирование солитонов. Последние являются в настоящее время объектом пристального изучения, в результате вновь возникшего интереса к солитонным линиям связи. Сама идея использовать такие линии связи была предложена в 1973 году [4], а после наблюдения оптических солитонов в 1980 г. [5], привлекла особое внимание [6, 7].

1.2. Нелинейное преобразование Фурье

1.2.1. Нелинейное уравнение Шредингера

Метод при котором по рассеянным данным восстанавливаются условия, при которых происходило рассеяние, широко используется учеными в различных областях науки. Один из ярких примеров это работа Ханса Гейгера и Эрнеста Марсдена под руководством Эрнеста Резерфорда в 1909 году по определению размера атомного ядра [8]. В данной работе они бомбардировали α-частицами мишень из нескольких сверхтонких слоев золотой фольги. Обнаружив, что некоторые частица отклонялись на углы более 90°, было заключено, что основная масса атома сосредоточена в очень маленьком положительно заряженном пространстве. С развитием квантовой механики, метод определения коэффициентов отражения и прохождения для потенциальных барьеров стал неотъемлемой частью понимания принципов работы квантовых систем. Гораздо позже аналогичный принцип начал использоваться учеными для решения одномерных уравнений в частных производных, где определяя данные рассеяния в вспомогательных задачах, можно получить необходимые решения задачи Коши для таких уравнений. Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) прекрасно продемонстрировал свою эффективность: в 1967 году в работе Гарднера [9] был описан способ применения данного метода для уравнения Кортевега-де-Вриза. Данный способ заинтересовал многие группы ученых, и через несколько лет, в 1972 году, В. Захаров и А. Шабат выпустили работу [3], где метод МОЗР был обобщен на матричные операторы.

Частным случаем такой задачи является Нелинейное (или кубическое) уравнение Шредингера (НЛУШ), которое в безразмерных величинах выписывается в виде

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \sigma|q|^2 q = 0, \tag{1.1}$$

где $q(t, z)$ это комплексная функция, описывающая оптический сигнал в зависимости от временной координаты t и пространственной z. Данное уравнение возникает при описании разного рода задач в исследованиях нелинейных сред с дисперсией. Оно описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью и используется для опи-

сания электромагнитных волн в плазме, нелинейных кристаллах, а также для описания распространения сигнала по оптоволокну.

Для перехода в размерные единицы необходимо произвести замены

$$\tau = \frac{T}{T_0} t \ , \quad Z = \frac{T^2}{T_0^2} \frac{1}{|\beta_2|} z \ , \quad Q = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma \frac{T^2}{T_0^2}}} q \ , \tag{1.2}$$

в результате которых уравнение (1.1) примет вид

$$i \frac{\partial Q}{\partial Z} - \sigma \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + \gamma |Q|^2 Q = 0. \tag{1.3}$$

Под T подразумевается размерный временной интервал, соответствующий безразмерному интервалу T_0, β_2 — дисперсия групповой скорости, γ — коэффициент нелинейности Керра.

1.2.2. Задача Захарова-Шабата

Основная идея метода, предложенного Захаровым и Шабатом, заключалась в переходе от нелинейного уравнения к операторному уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = [M, L] = ML - LM, \tag{1.4}$$

где M и L — матричные операторы размерности 2×2, а сама пара операторов называется парой Лакса [10]. Нахождение пары Лакса представляет из себя нетривиальную задачу, требующую от исследователя творческого мышления и неиссякаемого оптимизма, так как не существует универсального метода для нахождения пары операторов, удовлетворяющих уравнению (1.4), и приводящего к искомому нелинейному уравнению.

Вид операторов M and L для НЛУШ известен:

$$\mathbf{L} = i \begin{bmatrix} \partial_t & -q(t,z) \\ -\sigma q^*(t,z) & -\partial_t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = i \begin{bmatrix} \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}|q|^2 & -\sigma q \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma q_t \\ -q^* \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} q_t^* & -\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}|q|^2 \end{bmatrix}$$

где $q(t,z)$ было определено ранее в (1.1).

Уравнение (1.1) является условием совместимости двух линейных уравнений:

$$L\Psi = \xi \Psi, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = M\Psi. \tag{1.6}$$

Спектральный параметр ξ в общем случае является комплексным. Однако часто данное обозначение используют для обозначения вещественного параметра, а в случае, когда хотят подчеркнуть то, что параметр находится в верхней комплексной полуплоскости, используют обозначение ζ. Прямая задача Захарова-Шабата заключается в решении спектральной задачи для оператора L (1.5), и может быть выписана в виде системы

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = -i\xi\psi_1 + q\psi_2 \\ \partial_t \psi_2 = -\sigma q^* \psi_1 + i\xi\psi_2 \end{cases}. \tag{1.7}$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}(t)}{\partial t} = Q(t,z)\mathbf{\Psi}(t), \tag{1.8}$$

$\mathbf{\Psi}(t)$ — комплексная вектор-функция от вещественной переменной t, $Q(t,z)$ — комплексная матрица, зависящая также от комплексной переменной z:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t,z) = \begin{pmatrix} -i\xi & q(t,z) \\ -\sigma q^*(t,z) & i\xi \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

В большинстве задач переменная z фиксирована и обозначается либо как z_0, либо как $z = 0$, то есть условие берется в начале координатной сетки. В таком случае говорят, что поставлена задача Коши для системы (1.7) с начальным условием $q(t, z = 0)$, которое является начальным распределением поля, также называемым "рассеивающим потенциалом".

Для решения системы (1.7) сделаем предположение, что $q(t, z_0) = q_0(t)$ — быстроубывающая на бесконечности функция. Мы можем выделить два линейно независимых решения при $t \to \pm\infty$:

$$\mathbf{\Phi}_1^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\xi t} \quad \text{и} \quad \mathbf{\Phi}_2^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\xi t} \quad t \to -\infty, \tag{1.10}$$

$$\mathbf{\Phi}_1^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\xi t} \quad \text{и} \quad \mathbf{\Phi}_2^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\xi t} \quad t \to +\infty. \tag{1.11}$$

Из них можно построить две матрицы фундаментальных решений $\Phi^- = (\Phi_1^-, \Phi_2^-)$ и $\Phi^+ = (\Phi_1^+, \Phi_2^+)$, которые связаны друг с другом матрицей рассеяния S

$$\Phi^- = \Phi^+ S, \quad S = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & -a^* \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Для действительных параметров ξ коэффициенты a, b могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \lim_{t\to\infty} \varphi_1(t,\xi) e^{i\xi t}, \\ b(\xi) &= \lim_{t\to\infty} \varphi_2(t,\xi) e^{-i\xi t} \end{aligned} \tag{1.13}$$

где скалярные функции $\varphi_{1,2}$ — компоненты вектора Φ_1^-.

Это решение можно интерпретировать как абстрактную волну v^- набегающую на потенциал слева, частично переходя в волну справа bv^- с коэффициентом прохождением $b(\xi)$ и в волну слева av^+ с коэффициентом отражения $a(\xi)$ (Рис. 1.1).

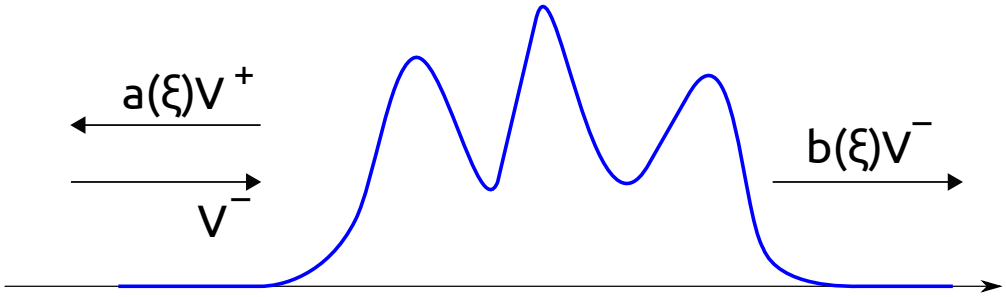


Рис. 1.1: Scattering

Все спектральные данные определяются через коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$. Для непрерывного спектра, расположенного на всей вещественной прямой, коэффициент отражения определяется по формуле:

$$r(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Для параметра $\xi = \zeta$, при $\mathrm{Im}\ \zeta > 0$, нули коэффициента $a(\zeta_n)$ определяют дискретный спектр ζ_n, для $n = 1...N$, N — количество дискретных собственных значений, а параметр

$$c_n(z) = c(\zeta_n, z) = \frac{b(\zeta_n)}{a'(\zeta_n)}, \quad \text{где} \quad a'(\zeta_n) = \frac{\partial a(\zeta)}{\partial \zeta}|_{\zeta=\zeta_n}, \tag{1.15}$$

является фазовым коэффициентом.

Полученные коэффициенты являются так называемыми "данными рассеяния" определяющими исходный потенциал $q_0(t)$. Для того, чтобы найти эволюцию этих данных, необходимо воспользоваться уравнением (1.6). Результат этого вычисления мы можем выписать в виде зависимости коэффициента $b(\xi, z)$ от переменной z:

$$b(\xi, z) = b(\xi, z_0)e^{-2i\xi^2(z-z_0)}, \tag{1.16}$$

выражающуюся в домножении на фазовый множитель $e^{-2i\xi^2(z-z_0)}$. Параметр ξ соответствует как непрерывному, так и дискретному спектру $\xi = \zeta$. Таким образом зависимость данных рассеяния от z представима в виде:

$$r(\xi, z) = r(\xi, z_0)e^{-2i\xi^2(z-z_0)}, \quad c_n(z) = c_n(z_0)e^{-2i\zeta_n^2(z-z_0)}. \tag{1.17}$$

Данные рассеяния формируют ядро $\Omega(z) = \Omega_{sol}(z) + \Omega_{rad}(z)$, где

$$\Omega_{sol}(z) = \sum_n^N c_n(z)e^{-i\zeta_n z}, \tag{1.18}$$

$$\Omega_{rad}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi r(\xi, z)e^{-i\xi z}. \tag{1.19}$$

Отметим тот факт, что при отсутствии дискретного спектра, ядро сводится к (1.19), которое представляет из себя ни что иное, как преобразование Фурье.

Последним этапом НПФ является восстановление сигнала из данных рассеяния. Для того, чтобы восстановить сигнал $q(t, z)$ в необходимой точке z, полученное ядро $\Omega(z)$ необходимо подставить в пару интегральных уравнений, которые носят название "уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко" (ГЛМ):

$$A_1^*(t, s) + \int\limits_{-s}^{t} \Omega(s + \tau)A_2(t, \tau)d\tau = 0, \tag{1.20}$$

$$-A_2^*(t, s) + \int\limits_{-s}^{t} \Omega(s + \tau)A_1(t, \tau)d\tau + \Omega(t + s) = 0, \tag{1.21}$$

где параметры находятся в пределах $-t \leq s < t$ и $0 \leq t \leq T$, $\Omega(t) \equiv \Omega(z = 0, t)$. Пара функций A_1 и A_2 составляют решение уравнений ГЛМ. После нахождения функций A_1 и A_2, восстановление сигнала происходит по простой формуле

$$q(z, t) = -2A_2^*(t, t). \tag{1.22}$$

1.2.3. Схема нелинейного преобразования Фурье

В заключение подведем итог вышеприведенным этапам. Нелинейное преобразование Фурье является аналитическим методом решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Основные этапы метода проиллюстрированы на Рис. 1.2:

- Решить прямую задачу рассеяния: по заданному начальному условию $q(t, 0)$, найти данные рассеяния $\Omega(0)$
- По $\Omega(0)$ найти $\Omega(z)$, используя формулы для эволюции данных рассеяния
- Решить обратную задачу рассеяния: по данным рассеяния $\Omega(z)$ восстановить функцию $q(t, z)$ - искомое решение задачи Коши

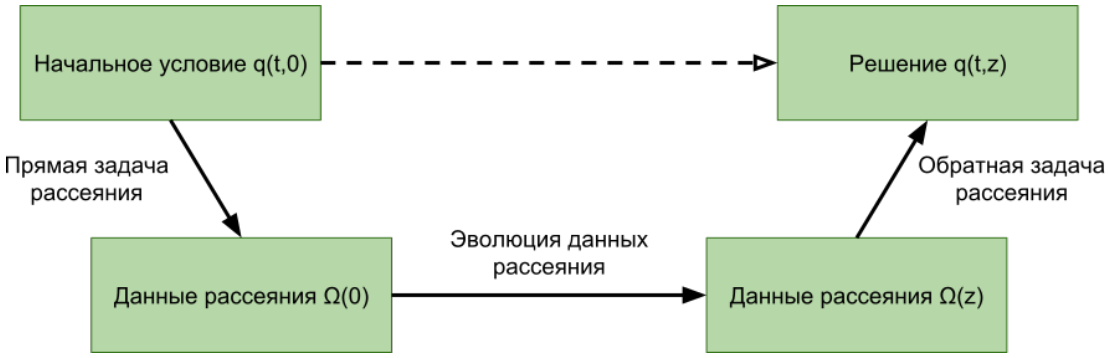


Рис. 1.2: Принципиальная схема метода нелинейного преобразования Фурье

На первом этапе определяются нелинейный спектр и данные рассеяния для конкретного начального распределения сигнала $q(t, z_0)$. В зависимости от параметра σ, нелинейный спектр может содержать либо только непрерывный спектр, лежащий на действительной оси (для $\sigma = -1$), либо в

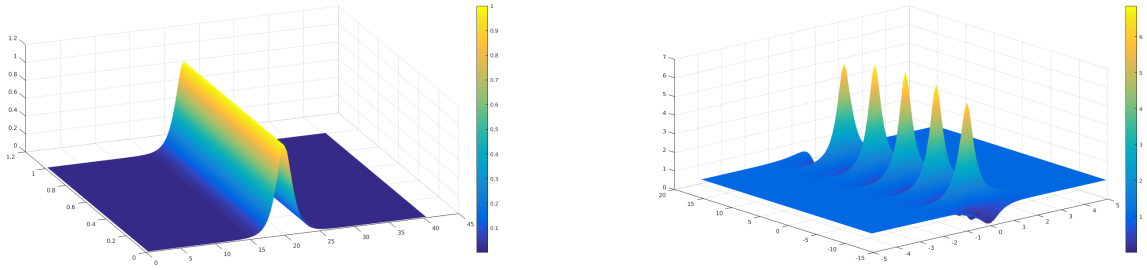
дополнению к непрерывному также дискретные комплексные собственные значения при $\sigma = 1$. При этом каждое дискретное значение соответствует солитону, содержащимся в исследуемом сигнале. На втором этапе формируется ядро (1.18) и (1.19), эволюция которого рассчитывается по аналитической формуле. В завершение, решаются уравнения (1.20) и (1.21) и по формуле (1.22) восстанавливается сигнал $q(t, z)$.

1.2.4. Солитоны

История солитонов начинается фактически в 1834 году, когда Джеймс Скотт Рассел наблюдал уединенный вал воды в канале, движущийся без заметного изменения формы или уменьшения скорости на протяжении нескольких километров [11]. Такие волны были названы уединенными, а позже, в 1965 г., был введен термин солитон для отображения их частицеподобной сущности [12]. Однако ещё ранее, в 1831 году М. Фарадей [13] описал эффект, при котором мелкий порошок, помещенный на колеблющуюся поверхность, собирался в мелкие "кучки" которые могли быть как неподвижные, так и движущиеся. Свойства солитонов были изучены в 1960-х годах, когда был введен метод обратной задачи рассеяния, в рамках которых солитоны возникали как обособленные решения [9].

В XX веке автосолитоны (диссипативные солитоны) активно изучались в физических, химических и биологических системах. Основные работы на эту тему связаны с моделью реакции-диффузии [14, 15], описывающей локализованные структуры, возникающие в химических реакциях активаторов, при протекании тока в плазме, газе и полупроводниках.

В нелинейной оптике солитоны делятся на временные и пространственные. Временные солитоны локализованы во времени и сопоставлены оптическим импульсам, сохраняющим свою форму, а пространственные — самонаправленные пучки, ограниченные в поперечных направлениях, ортогональных вектору распространения. Формирование и существование таких типов солитонов вызвано оптическим эффектом Керра [16–18] — нелинейным изменением показателя преломления среды, зависящим от интенсивности света и приводящим к пространственной фокусировке (либо дефокусировке) и временной самомодуляции фазы (СМФ).



а) б)

Рис. 1.3: Примеры солитонных решений: а) — фундаментальный солитон, б) — бризер Ахмедиева.

Оптические солитоны делятся на два больших класса: консервативные и диссипативные. Консервативные солитоны создаются вследствие баланса нелинейной фокусировки и линейного расплывания в прозрачных средах, в которых отсутствует накачка энергии, а потери излучения пренебрежимо малы. Диссипативные солитоны (автосолитоны) локализуются в результате баланса притока и оттока энергии в системе. Для них также может присутствовать эффект уравновешивания линейного расплывания и нелинейной фокусировки.

Два данных класса солитонов имеют как общие свойства, так и принципиальные отличия, как результат их общей природы, но разного способа формирования. Набор основных параметров диссипативных солитонов является дискретным из-за требования к энергетическому балансу. Это приводит к их повышенной устойчивости, и, как следствие, диссипативные солитоны имеют перспективы в различных практических приложениях. Консервативные солитоны определяются непрерывно меняющимся параметром, например, интенсивностью или шириной. В зависимости от способа ввода энергии в оптическую систему, солитоны разделяются на когерентные и некогерентные. Когерентные солитоны образуются в пучке непрерывного когерентного излучения, который определяет частоту и фазу. Некогерентный сигнал образует некогерентные солитоны, для которых общая фаза излучения произвольна.

Из-за наличия шума в реальных системах, реализуется возможность самопроизвольного перехода между солитонными и бессолитонными струк-

турами. Сам солитон, хоть и не является стабильной структурой, может существовать продолжительное время, поскольку он устойчив к малым возмущениям. Переходы могут быть вызваны крупными флуктуациями, которые маловероятны в реальных системах. Этот факт приводит к одной интересной особенности, описанной в работе [19], когда в процессе эволюции сигнала в системе возникают солитоны.

Исследование оптических солитонов началось в 60-х годах XX века, когда появились первые оптические нелинейные системы, и стали доступны эксперименты в этой области. Первым примером была статья [20] о возможности существования пространственного консервативного солитона в прозрачной среде с самофокусировочной нелинейностью. В дальнейшем был обнаружен временной солитон в одномодовых волокнах с керровской нелинейностью [4].

1.2.5. Аналитические решения

Satsuma-Yajima сигнал

В качестве первого аналитического сигнала для которого известен нелинейный спектр, мы возьмем следующий:

$$q(t,0) = A\,\mathrm{sech}(t), \tag{1.23}$$

профиль гиперболического секанса с переменной амплитудой A. Мы предполагаем, что $A > 0$ и действительное, поскольку иначе фазовый множитель влияет только на фазу решения $q(t,z)$, что в данном контексте нас не интересует. В 1974 году, Satsuma и Yajima показали, что сигнал (1.23) является частным решением задачи Захарова-Шабата (1.7), и нашли его нелинейный спектр.

Они обнаружили, что функция, записанная в следующем виде:

$$\psi_1(t;\zeta) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(s;\zeta) \\ -A(\zeta - \frac{1}{2}i)^{-1} y_1^{(2)}(s;-\zeta) \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

является функцией Йоста задачи (1.7), где функции $y_1^{(1,2)}$ определены че-

рез:

$$y_1^{(1)}(s;\zeta) = s^{i\zeta/2}(1-s)^{-i\zeta/2}F\left(-A, A, i\zeta + \frac{1}{2}; s\right) \tag{1.25}$$

$$y_1^{(2)}(s;\zeta) = s^{1/2-i\zeta/2}(1-s)^{-i\zeta/2}F\left(\frac{1}{2} - i\zeta + A, \frac{1}{2} - i\zeta - A, \frac{3}{2} - i\zeta; s\right) \tag{1.26}$$

в которых $F(\alpha, \beta, \gamma; s)$ — гипергеометрическая функция, $s \equiv \frac{1-\tanh(x)}{2}$. Принимая во внимание свойства гипергеометрической функции:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; s) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma; 1-s) +$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-s)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-s)$$

не составит труда вычислить асимптотику функции $\psi_1(t;\zeta)$:

$$\psi_1(t;\zeta) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta t}, \qquad x \to \infty \tag{1.27}$$

$$\psi_1(t;\zeta) \to \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^2(i\zeta+\frac{1}{2})}{\Gamma(i\zeta+\frac{1}{2}+A)\Gamma(i\zeta+\frac{1}{2}-A)}e^{-i\zeta t} \\ -i\sin(\pi A)\mathrm{sech}(\pi\zeta)e^{i\zeta t} \end{pmatrix}, \qquad x \to -\infty \tag{1.28}$$

Функция $\frac{\Gamma^2(i\zeta+\frac{1}{2})}{\Gamma(i\zeta+\frac{1}{2}+A)\Gamma(i\zeta+\frac{1}{2}-A)}$ стоящая перед $e^{-i\zeta t}$ в последнем выражении есть ни что иное, как коэффициент $a(\zeta)$, нули которого дают нам дискретный спектр задачи (1.7):

$$\zeta_n = i\left(A + \frac{1}{2} - n\right), \tag{1.29}$$

где n — положительное целое число, удовлетворяющее условию $n < A + \frac{1}{2}$. Первое собственное значение появляется при $A = \frac{1}{2}$, второе при $A = \frac{3}{2}$ и так далее. Таким образом для произвольного $A > 0$ число дискретных собственных значений равно наибольшему целому числу n, удовлетворяющему условию $n - \frac{1}{2} < A$.

Прямоугольный сигнал

Другим примером начального распределения может служить прямоугольный сигнал с изменяющейся амплитудой:

$$q(t,0) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.30}$$

Аналогично с предыдущим типом сигнала мы предполагаем, что $A > 0$ и действительное. Коэффициент $a(\zeta)$ принимает вид:

$$a(\zeta) = e^{i\zeta}\left(\cos\sqrt{\zeta^2+A^2} - \frac{i\zeta}{\sqrt{\zeta^2+A^2}}\sin\sqrt{\zeta^2+A^2}\right). \tag{1.31}$$

Данное выражение равно нулю, если выражение в скобках равно нулю, что приводит нас к трансцендентному уравнению:

$$\cot\sqrt{\zeta^2+A^2} = \frac{i\zeta}{\sqrt{\zeta^2+A^2}} \tag{1.32}$$

Данное выражение может быть справедливым только для мнимых ζ. Каждое следующее собственное значение появляется при $A = (n - \frac{1}{2})\pi$, где n — целое положительное число. Эту формулу можно переписать в виде

$$N = \mathrm{int}[1/2 + L_1(q)/\pi], \tag{1.33}$$

где $\mathrm{int}[...]$ означает целую часть выражения в скобках, а N это количество солитонов. Первый уровень L_1 нормы, рассчитанный по этой формуле, равен 1.57, второй — 4.71 и так далее.

1.2.6. Критерий существования дискретных собственных значений

Выше мы увидели, что существует критерий для сигналов определенной формы, который определяет возможность существования дискретных собственных значений в задаче Захарова-Шабата. Неточный критерий, описанный в работе [21], заключается в том, что если L_1 норма сигнала, определенная по формуле $\|q(t,0)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty}|q(t,0)|dt$, меньше 1.317, то система (1.7) не имеет дискретного спектра.

Позже, в 2003 году, Klaus и Shaw в работе [22] нашли точный критерий. Для комплексного начального условия $q(t,0)$ не существует дискретный спектр, если

$$\|q(t,0)\|_{L_1} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1.34}$$

Если L_1 норма больше данного значения, то дискретный спектр может существовать (но не обязательно существует).

В этой работе мы используем как L_1 норму (2.1), так и L_2 норму (2.2) для которой не существует критерия, подобного (1.34). Однако для численного моделирования мы можем получить критерий, который может дать нам некоторую предварительную информацию об уровнях L_2 нормы, а значит и о средней мощности сигнала, меньше которой в сигналах не может существовать дискретного спектра. Без ограничения общности, мы можем рассматривать сигнал $q(t,z)$ при фиксированной пространственной координате z. Последующие вычисления выполнены в безразмерных единицах.

$$L_1 = \|q(t,z)\|_{L_1} = \sum_{n=0}^{N-1} |q_n|\Delta t, \tag{1.35}$$

$$L_2 = \|q(t,z)\|_{L_2} = \sum_{n=0}^{N-1} |q_n|^2\Delta t, \tag{1.36}$$

где $\Delta t = T/N$, T — временной интервал, на котором определена функция $q(t,z)$, N — количество точек дискретизации, q_n — значения функции $q(t_n,z)$ в этих точках. Поскольку мы имеем некоторый конечный набор значений q_n, то мы можем вычислить среднее значение для данного набора

$$< |q_n| >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |q_n| = \frac{L_1}{N\Delta t} = \frac{L_1}{T}, \tag{1.37}$$

$$< |q_n|^2 >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |q_n|^2 = \frac{L_2}{N\Delta t} = \frac{L_2}{T}, \tag{1.38}$$

где скобки $< ... >$ обозначают операцию взятия среднего. Модуль комплексных чисел действителен и удовлетворяет условию $|q_n| \geq 0$. Также значение L_1 по определению равно или больше 0. Теперь вспомним, что среднее от квадрата положительной величины больше либо равно квадрату среднего

этой величины (неравенство о средних), выпишем

$$< |q_n|^2 > \geq < |q_n| >^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_2}{T} \geq \frac{L_1^2}{T^2}. \tag{1.39}$$

Осталось получить ограничение на L_1^2 из критерия (1.34). В первую очередь отметим, что $\frac{\pi}{2} > 1$, откуда следует

$$L_1 > \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad L_1^2 > \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1^2}{T} > \frac{\pi^2}{4T}. \tag{1.40}$$

Можем заключить, что критерий существования дискретных собственных значений задачи Захарова-Шабата для L_2 нормы:

$$L_2 > \frac{\pi^2}{4T}. \tag{1.41}$$

Нет ничего удивительного в том, что в предельном переходе $T \to \infty$ критерий сводится к простому $L_2 > 0$. Однако в большинстве задач сигнал локализован во времени, поэтому интеграл по бесконечному промежутку в формуле (2.2) может быть заменен интегралом по конечному интервалу, где сигнал не равен нулю

$$\widetilde{L_2} = \|q(t,z)\|_{\widetilde{L_2}} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} |q(t,z)|^2 dt, \tag{1.42}$$

для которого критерий (1.41) остается справедливым.

1.3. Численные методы

1.3.1. Метод Боффетты-Осборна определения данных рассеяния

Данный метод был предложен в 1992 году Боффета и Осборном и детально описан в их работе [23]. Основная идея метода заключается в том, что систему ЗШ можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1 = -\xi \psi_1 + q\psi_2 \\ \partial_t \psi_2 = \sigma q^* \psi_1 + \xi \psi_2 \end{cases} \tag{1.43}$$

которая при переходе к дискретной сетке по переменной t дает эволюцию спектральной собственной функции Ψ на каждом интервале Δt:

$$\Psi(t_n + \Delta t) = U(q_n)\Psi(t_n) \tag{1.44}$$

где $U(q_n, \Delta t)$ представлена в виде экспоненциальной функции от матрицы $Q(\xi)$:

$$U(q) = \exp[\Delta t Q(\xi)] = \exp\left(\Delta t \begin{pmatrix} -i\xi & q \\ \sigma q^* & i\xi \end{pmatrix}\right) \tag{1.45}$$

Если разложить вышеприведенную экспоненту в ряд Тейлора и просуммировать матрицы, а после, предполагая, что каждый элемент матрицы является рядом Тейлора, свернуть эти ряды для каждого элемента, то получим следующее выражение для пропогатора:

$$\begin{aligned} U(q) &= \exp[\Delta t Q(\xi)] = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(k\Delta x) - \frac{i\xi}{k}\sinh(k\Delta x) & \frac{q}{k}\sinh(k\Delta x) \\ \frac{\sigma q^*}{k}\sinh(k\Delta x) & \cosh(k\Delta x) + \frac{i\xi}{k}\sinh(k\Delta x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.46}$$

где $k^2 = \sigma|q|^2 - \xi^2$ — константа на интервале Δt. С помощью вышеизложенного метода мы можем решить задачу рассеяния, то есть определить коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$. Однако, для дискретного спектра это не достаточно: поскольку коэффициент $a(\xi)$ равен нулю, необходимо вычислить его производную $a'(\xi_n) = \frac{\partial a(\xi)}{\partial \xi}|_{\xi=\xi_n}$. Теперь введем четырехкомпонентное поле, содержащее как вектор-функцию Ψ, так и его производную по отношению к ξ:

$$\Xi(t, \xi) = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

где $\Psi' = \partial\Psi/\partial\xi$. Аналогично выражениям (1.45) и (1.46) для поля Ξ можно выписать рекурсивное соотношение, продифференцировав выражение (1.44):

$$\Xi(t_n + \Delta t) = T(q_n)\Xi(t_n) \tag{1.48}$$

где

$$T(q_n) = \begin{pmatrix} U(q_n) & 0 \\ U'(q_n) & U(q_n) \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

матрица 4×4, $U'(q_n) = \partial U(q_n)/\partial\xi$ и выписывается в виде:

$$\begin{aligned}
U'_{11} &= i\Delta t\frac{\xi^2}{k^2}\cosh(k\Delta t) - \left(\xi\Delta t + i + i\frac{\xi^2}{k^2}\right)\frac{\sinh(k\Delta t)}{k} \\
U'_{12} &= -\frac{q\xi}{k^2}\left(\Delta t\cosh(k\Delta t) - \frac{\sinh(k\Delta t)}{k}\right) \\
U'_{21} &= -\frac{\sigma q\xi}{k^2}\left(\Delta t\cosh(k\Delta t) - \frac{\sinh(k\Delta t)}{k}\right) \\
U'_{22} &= -i\Delta t\frac{\xi^2}{k^2}\cosh(k\Delta t) - \left(\xi\Delta t - i - i\frac{\xi^2}{k^2}\right)\frac{\sinh(k\Delta t)}{k}
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Для численного расчета мы рассматриваем начальный потенциал $q(t,0)$ на $M+1$ участках, предполагая, что

$$q(t,0) = q_n \quad \text{на промежутке} \quad t \in \left(t_n - \frac{\Delta t}{2};\ t_n + \frac{\Delta t}{2}\right]. \tag{1.51}$$

В таком случае дискретное решение задачи рассеяния следующее:

$$\Xi(t_n) = \prod_{j=n-1}^{-M/2} T(q_j)\Xi(t_{-M/2}). \tag{1.52}$$

Для получения данных рассеяния необходимо получить матрицу рассеяния S

$$S(\xi) = \prod_{j=M/2-1}^{-M/2} T(q_j) = \begin{pmatrix} \Sigma(\xi) & 0 \\ \Sigma'(\xi) & \Sigma(\xi) \end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

где вспомогательная матрица Σ определяется через

$$\Sigma = \prod_{j=M/2-1}^{-M/2} U(q_j), \quad \Sigma' = \partial\Sigma/\partial\xi. \tag{1.54}$$

Изначально в задаче (1.7) вектор-функция Ψ распространялась от $-\infty$ до $+\infty$. В численном моделировании этот интервал заменяется на интервал от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$. В этом случае получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
a(\xi) &= S_{11}(\xi)e^{i\xi T}, \\
b(\xi) &= S_{21}(\xi), \\
\frac{\partial a(\xi)}{\partial\xi} &= [S_{31} + i\frac{T}{2}(S_{11} + S_{33})]e^{i\xi T}, \\
\frac{\partial b(\xi)}{\partial\xi} &= S_{41} + i\frac{T}{2}(S_{43} - S_{21}).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Данный метод позволяет нам найти все данные рассеяния для произвольного ξ. Несмотря на то, что метод не вычисляет напрямую спектр задачи (1.7), он может помочь нам в его нахождении, поскольку мы знаем, что в точках дискретного спектра на комплексной плоскости коэффициент рассеяния $a(\xi) \equiv 0$.

Необходимо отметить, что при $t \ll 1$ матрица $U(q)$ 1.46 сводится к

$$U(q) \approx \begin{pmatrix} 1 - i\xi\Delta t & q\Delta t \\ \sigma q^* \Delta t & 1 + i\xi\Delta t \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Эта форма была найдена Абловицем и Лэдиком [24, 25] и также может быть использована для решения задачи Захарова-Шабата.

1.3.2. Töplitz inner bordering метод

Формирование технологий создания волоконных брэгговских решеток (ВБР) [26, 27] сопровождалось развитием численных методов их моделирования и анализа. Восстановление показателя преломления из заданной зависимости коэффициента рассеяния от частоты составляет обратную задачу рассеяния, которая в математической физике решается с помощью пары уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко [3].

В работе [28] был предложен метод решения уравнений ГЛМ (1.20) и (1.21). Он заключается в том, что уравнения ГЛМ можно привести к уравнениям с Тёплицевым ядром с помощью замены $u(t,x) = A_1(t, t-x)$ и $v(t,y) = -A_2^*(t, y-t)$:

$$\begin{gathered} u(t,x) + \int\limits_x^{2t} \Omega^*(y-x) v(t,y) dy = 0 \\ v(t,y) + \int\limits_0^y \Omega(y-x) u(t,x) dx + \Omega(y) = 0 \end{gathered} \tag{1.57}$$

где $\Omega = \Omega_{sol} + \Omega_{rad} = \sum_n c_n e^{-i\xi_n x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi r(\xi) e^{-i\xi x}$ — интегральное ядро, параметры x и y находятся в промежутке $0 \le x,y < 2t$, переменная t находится в диапазоне $0 \le t < T$, а сигнал восстанавливается по формуле $q(t) = 2v(t, 2t-0)$.

Далее уравнения (1.57) дискретизуются на равномерной сетке, а интегралы представляются в виде сумм. Получившиеся уравнения имеют блочную структуру и записываются в матричном виде:

$$\mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} \tag{1.58}$$

где матрица $\mathbf{G}$ и вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяются по формулам:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}\mathbf{E} & \pm\mathbf{\Omega}^{\dagger}\\ \mathbf{\Omega} & \mathbf{E}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = h\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\Omega_0 & 0 & \dots & 0\\ \Omega_1 & \frac{1}{2}\Omega_0 & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ \Omega_{m-1} & \Omega_{m-2} & \dots & \frac{1}{2}\Omega_0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \pm\frac{h}{2}v_m^{(m)}\tilde{\rho}^*, \mathbf{b} = -\left(1+\frac{h}{2}u_1^{(m)}\rho\right),$$

$$\rho = \begin{pmatrix}\Omega_1\\ \vdots\\ \Omega_m\end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_1^{(m)}\\ \vdots\\ u_m^{(m)}\end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix}v_1^{(m)}\\ \vdots\\ v_m^{(m)}\end{pmatrix}. \tag{1.59}$$

$\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Первые и последние элементы вектора решения вычисляются по формулам:

$$u_1^{(m)} = \pm\frac{h}{2}v_m^{(m)}\langle\mathbf{y}^*|\tilde{\rho}^*\rangle \mp \left(1+\frac{h}{2}u_1^{(m)}\right)\langle\mathbf{z}^*|\rho\rangle,$$

$$u_1^{(m)} = \pm\frac{h}{2}v_m^{(m)}\langle\tilde{\mathbf{z}}|\tilde{\rho}^*\rangle - \left(1+\frac{h}{2}u_1^{(m)}\right)\langle\tilde{\mathbf{y}}|\rho\rangle. \tag{1.60}$$

Скобки обозначают скалярное произведение $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\cdot\mathbf{y}$. Также можно ввести параметры

$$\alpha_m = h\langle\mathbf{z}^*|\rho\rangle, \quad \beta_m = h\langle\tilde{\mathbf{y}}|\rho\rangle. \tag{1.61}$$

Тогда уравнение (1.60) позволяет вычислить $v_m^{(m)}$:

$$v_m^{(m)} = \frac{-\beta_m/h}{1\pm\operatorname{Im}\alpha_m - \frac{1}{4}(|\alpha_m|^2\mp|\beta_m|^2)}. \tag{1.62}$$

Также предполагается, что с требуемой точностью $\alpha_m = -u(x_m,0)h + O(h^2)$, что приводит нас в финале к решению:

$$q_m = 2v_m^{(m)} = -2\beta_m/h + O(h^2). \tag{1.63}$$

Данная процедура может быть выписана в виде алгоритма, который может быть обращен. Далее мы приводим два алгоритма прямого и обратного преобразований, в результате которых из ядра может быть восстановлен сигнал (Алгоритм 1) и наоборот: из сигнала получено интегральное ядро (Алгоритм 2).

Алгоритм 1. Обратный алгоритм TIB восстановления сигнала из ядра

1: $m = 1$ $q_0 = -2\Omega_0$ $y_0^{(1)} = \frac{1}{1\mp h^2|\Omega_0|^2/4}$ $z_0^{(1)} = -\frac{y_0^1 h\Omega_0}{2}$

2: $\beta_m = h\sum_{j=0}^{m-1}\Omega_{m-j}y_j^{(m)}$

3: $q_m = -2\beta_m/h$

4: $c_m = \frac{1}{1\mp|\beta_m|^2}, d_m = -\beta_m c_m$

5: $\mathbf{y}^{(m+1)} = c_m\begin{pmatrix}\mathbf{y}^{(m)}\\ 0\end{pmatrix} + d_m\begin{pmatrix}0\\ \pm\tilde{\mathbf{z}}^{*(m)}\end{pmatrix}$

6: $\mathbf{z}^{(m+1)} = c_m\begin{pmatrix}\mathbf{z}^{(m)}\\ 0\end{pmatrix} + d_m\begin{pmatrix}0\\ \tilde{\mathbf{y}}^{*(m)}\end{pmatrix}$

7: Инкрементируя m, перейти на шаг 2.

Алгоритм 2. Прямой алгоритм TIB расчета ядра из сигнала

1: $\Omega_0 = -q_0/2$

2: $\beta_m = -hq_m/2$

3: $\Omega_m = \left(\beta_m - h\sum_{j=1}^{m-1}R_{m-j}y_j^{(m)}\right)/hy_0^{(m)}$

4: $c_m = \frac{1}{1\mp|\beta_m|^2}, d_m = -\beta_m c_m$

5: $\mathbf{y}^{(m+1)} = c_m\begin{pmatrix}\mathbf{y}^{(m)}\\ 0\end{pmatrix} + d_m\begin{pmatrix}0\\ \pm\tilde{\mathbf{z}}^{*(m)}\end{pmatrix}$

6: $\mathbf{z}^{(m+1)} = c_m\begin{pmatrix}\mathbf{z}^{(m)}\\ 0\end{pmatrix} + d_m\begin{pmatrix}0\\ \tilde{\mathbf{y}}^{*(m)}\end{pmatrix}$

7: Инкрементируя m, перейти на шаг 2.

1.3.3. N-солитонный сигнал

Факторизация уравнений ГЛМ

Для дискретного спектра факторизация ядра уравнений ГЛМ приводит к системе алгебраических уравнений (подробное описание можно най-

ти в [29]). Тогда N-солитонное решение может быть найдено с помощью следующего точного выражения:

$$q^{(N)}(t, z = 0) = -2\langle \mathbf{\Psi}(t)|(\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{M}}^*(t)\widehat{\mathbf{M}}(t))^{-1}|\mathbf{\Phi}(t)\rangle \tag{1.64}$$

$\widehat{\mathbf{E}}$ это $N \times N$ единичная матрица,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Psi}(t)| &= \langle c_1 e^{-i\xi_1 t}, ..., c_N e^{-i\xi_N t}|, \\ \langle \mathbf{\Phi}(t)| &= \langle e^{-i\xi_1 t}, ..., e^{-i\xi_N t}|, \\ \widehat{\mathbf{M}}_{k,j}(t) &= c_j \frac{e^{i(\xi_k^* - \xi_j)t}}{\xi_k^* - \xi_j}, \end{aligned} \tag{1.65}$$

где c_j определены в (1.15). Для больших N численные алгоритмы для данной формулы неустойчивы, однако при небольших N этот метод оказывается очень удобным.

Метод одевания

Существует другой метод, позволяющий находить N-солитонное решение, который называется методом одевания. Основная идея метода заключается в использовании преобразования Дарбу, с помощью которого конструируется итеративная схема нахождения N-солитонного решения. Рассмотрим этот метод подробнее.

Введем следующую систему:

$$\begin{cases} x_t = P(\zeta, q)x, \\ x_z = M(\zeta, q)x, \end{cases}, \tag{1.66}$$

где оператор M определен в (1.6), а P рассчитывается по формуле

$$P = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(t,z) \\ -q^*(t,z) & i\lambda \end{pmatrix}. \tag{1.67}$$

Это та же матрица $Q(t, z)$ из выражения (1.9), но с $\sigma = 1$, поскольку исследуются солитонные решения. Также используется обозначение $\xi = \lambda$ — комплексное число, но не обязательно собственное значение для q, которое является решением, лежащим в основе системы (1.66).

Теорема (О преобразовании Дарбу). Пусть $\varphi(t, \lambda; q)$ известное решение системы (1.66), и $\Sigma = S\Gamma S^{-1}$, где $S = [\varphi(t, \lambda; q), \tilde{\varphi}(t, \lambda; q)]$, $\Gamma =$

$\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^*)$. Если $v(t, \mu; q)$ удовлетворяет (1.66), тогда $u(t, \mu; \tilde{q})$, полученное с помощью преобразования Дарбу

$$u(t, \mu; \tilde{q}) = (\mu I - \Sigma) v(t, \mu; q), \tag{1.68}$$

удовлетворяет (1.66) для

$$\tilde{q} = q + 2i(\lambda^* - \lambda) \frac{\varphi_1 \varphi_2^*}{|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2}. \tag{1.69}$$

Более того, q и $\tilde{q}$ удовлетворяют уравнениям, лежащим в основе системы (1.66).

Из данной теоремы следует:

- Из $\varphi(t, \lambda; q)$ и $v(t, \mu; q)$ можно сконструировать $u(t, \mu; \tilde{q})$. Если μ является собственным значением для q, то оно является собственным значением и для $\tilde{q}$. Если $u(t, \mu = \lambda; \tilde{q}) \neq 0$, то λ также собственное значение $\tilde{q}$.

- $\tilde{q}$ — новое решение уравнения, лежащего в основе (1.66), полученное из q по формуле (1.69), и $u(t, \mu; \tilde{q})$ — один из его собственных векторов.

Сам алгоритм начинается с тривиального решения $q^{(0)} = 0$, а начальные собственные вектора выбираются в виде $v(t, \lambda_j; 0) = [A_j e^{-i\lambda_j t}, B_j e^{i\lambda_j t}]$. Коэффициенты A_j и B_j задают спектральную амплитуду и форму импульса. Для того, чтобы получить новые собственные вектора, необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} v_1(t, \lambda_j; q^{(k+1)}) = & \frac{1}{\|v(t, \lambda_{k+1}; q^{(k)})\|^2} \\ & \{\{(\lambda_j - \lambda_{k+1}) |v_1(t, \lambda_{k+1}; q^{(k)})|^2 + \\ & + (\lambda_j - \lambda_{k+1}^*) |v_2(t, \lambda_{k+1}; q^{(k)})|^2\} v_1(t, \lambda_j; q^{(k)}) \\ & (\lambda_{k+1}^* - \lambda_{k+1}) v_1(t, \lambda_{k+1}; q^{(k)}) v_2^*(t, \lambda_{k+1}; q^{(k)}) v_2(t, \lambda_j; q^{(k)})\}, \end{aligned} \tag{1.70}$$

$$
\begin{aligned}
v_2(t,\lambda_j;q^{(k+1)}) =& \frac{1}{\|v(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})\|^2} \\
& \{\{(\lambda_j-\lambda_{k+1}^*)|v_1(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})|^2+ \\
& +(\lambda_j-\lambda_{k+1})|v_2(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})|^2\}v_2(t,\lambda_j;q^{(k)}) \\
& (\lambda_{k+1}^*-\lambda_{k+1})v_1^*(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})v_2(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})v_1(t,\lambda_j;q^{(k)})\},
\end{aligned} \tag{1.71}
$$

для $k=0,...,N-2$ и $j=k+2,...,N$. А дополнение сигнала происходит по формуле:

$$
q^{(k+1)} = q^{(k)} + 2i(\lambda_{k+1}^*-\lambda_{k+1})\frac{v_1(t,\lambda_{k+1};q^{(k)}}{\|v(t,\lambda_{k+1};q^{(k)})\|^2} \tag{1.72}
$$

Такой метод удобен для получения N-солитонных решений с большим значением N, поскольку не требуется обращать матрицы.

1.3.4. Метод Фурье-коллокаций нахождения нелинейного спектра

Для большей части начальных потенциалов, нелинейный спектр не может быть рассчитан аналитически. В таких случаях необходимо использовать численные алгоритмы.

Уравнение (1.5) является стандартной задачей нахождения собственных значений оператора L и выписывается в виде системы:

$$
\begin{cases} -\partial_t\psi_1 + q(t,0)\psi_2 = \xi\psi_1 \\ \partial_t\psi_2 - \sigma q^*(t,0)\psi_1 = \xi\psi_2 \end{cases}. \tag{1.73}
$$

Один из способов решения данной проблемы, является переход к конечно-разностным схемам на дискретной сетке. Для этого из бесконечного интервала по оси t выбирается конечный промежуток и разбивается на конечные интервалы, в соответствии с сеткой дискретизации. Операторы взятия производных заменяются их конечно-разностными аналогами. После этих операций, задача (1.5) становится стандартной задачей нахождения собственных значений и собственных функций для матриц, которая может быть решена стандартными алгоритмами: LR, QR, метод Холецкого. Сто-

ит отметить, что QR-алгоритм является более стабильным, чем LR, который сейчас почти не используется. К сожалению, точность аппроксимации посредством конечно-разностного метода достаточно низкая и может приводить к появлению "ненастоящих" собственных значений.

Можно предположить, что если бы мы могли переписать исходную систему (1.73) без дифференциальных операторов, то мы бы смогли использовать данный метод для нахождения нелинейного спектра. В данном вопросе на помощь нам приходит классическое преобразование Фурье, в котором дифференциальные операторы заменяются на умножение на соответствующий множитель:

$$\begin{cases} -\partial_t \psi_1 + q(t,0)\psi_2 = \xi\psi_1 \\ \partial_t \psi_2 - \sigma q^*(t,0)\psi_1 = \xi\psi_2 \end{cases} \to \begin{cases} -ik\varphi_1 + u\varphi_2 = \xi\varphi_1 \\ ik\varphi_2 - \sigma u^*\varphi_1 = \xi\varphi_2 \end{cases} \tag{1.74}$$

В данном переходе, мы заменяем начальный потенциал и собственные функции на следующие дискретные суммы:

$$\psi_1(t) = \sum_{-N/2}^{N/2} \varphi_{1,n} e^{ink_0 t}, \psi_2(t) = \sum_{-N/2}^{N/2} \varphi_{2,n} e^{ink_0 t}, q(t,0) = \sum_{-N/2}^{N/2} u_n e^{ink_0 t}, \tag{1.75}$$

где $k_0 = 2\pi/T$, T – размер временной области, а $N+1$ – количество точек дискретизации (или количество мод) в Фурье-образе начального сигнала q. При данном переходе, начальная задача (1.73) заменяется на задачу нахождения собственных значений для блочной матрицы:

$$\begin{pmatrix} -H_1 & H_2 \\ H_2^\dagger & H_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = i\xi \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{1.76}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\varphi_{1,-N/2}, \varphi_{1,-N/2+1}, ..., \varphi_{1,N/2-1}, \varphi_{1,N/2})^T \\ \varphi_2 &= (\varphi_{2,-N/2}, \varphi_{2,-N/2+1}, ..., \varphi_{2,N/2-1}, \varphi_{2,N/2})^T \end{aligned} \tag{1.77}$$

Блоки матрицы выглядят следующим образом:

$$H_1 = ik_0 \begin{pmatrix} -\frac{N}{2} & & & & \\ & -\frac{N}{2}+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{N}{2}-1 & \\ & & & & \frac{N}{2} \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} u_0 & u_{-1} & \dots & u_{-N} & & & \\ u_1 & u_0 & u_{-1} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & u_1 & u_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ u_N & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{-N} \\ & u_N & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{-1} \\ & & & u_N & \dots & u_{-1} & u_0 \end{pmatrix}. \tag{1.79}$$

Точность нахождения собственных значений для данной системы намного выше, чем для первоначального уравнения (1.73), и "ненастоящие" собственные значения не появляются в нелинейном спектре.

1.3.5. Интегральная формула Коши

Задачу нахождения дискретного спектра, как мы уже увидели ранее, можно свести к нахождению нулей коэффициента $a(\xi)$ в верхней комплексной полуплоскости. В данной интерпретации, зависимость коэффициента a от комплексной переменной ξ можно понимать как функцию, определенную на множестве комплексных чисел. Поэтому мы можем применить для решения обозначенной выше задачи интегральную формулу Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{1.80}$$

где D — область в комплексной плоскости с границей $\Gamma = \partial D$, $f(z)$ — голоморфная функция в $\bar{D}$, z_0 — точка в D. Для нахождения собственных значений мы воспользуемся методом, описанным в работах [30, 31], который использует набор контурных интегралов $\{s_p\}_{p=1}^{P}$:

$$s_p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \xi^p \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi = \sum_{j=1}^{P} \xi_j^p, \quad p = 1...P. \tag{1.81}$$

где P — количество нулей коэффициента $a(\xi)$ в верхней полуплоскости. Каждый контурный интеграл дает нам сумму, находящуюся справа в выражении, которая используется для нахождения всех собственных значений (Рис. 1.4). При $p = 0$ выражение дает полное количество нулей внутри

контура Г. Это факт может быть использован для удобного подсчета количества дискретных собственных значений для заданного сигнала. Для этого перепишем формулу (1.81) для контура, проходящего по вещественной прямой и замыкающегося в верхней полуплоскости через бесконечно удаленную точку (Рис. 1.5):

$$N = \frac{1}{2\pi} Arg(a(\xi))|_{-\infty}^{+\infty}, \tag{1.82}$$

где N — полное количество солитонов в сигнале, спектральный параметр ξ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ на вещественной прямой. В рамках данной задачи $N = P$. Эта формула удобна для численного расчета: выбрав достаточно большой интервал вещественной прямой и рассчитав изменение фазы коэффициента $a(\xi)$, мы точно узнаем количество дискретных собственных значений.

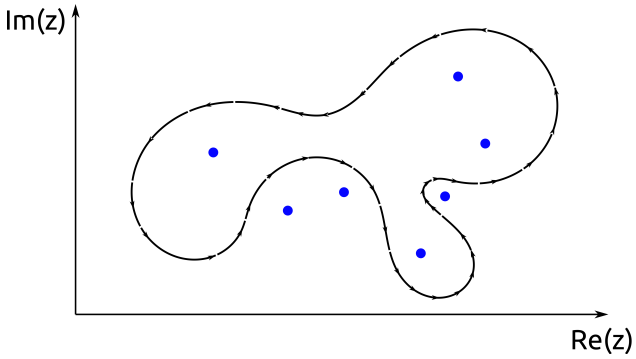


Рис. 1.4: Обход нескольких нулей на комплексной плоскости.

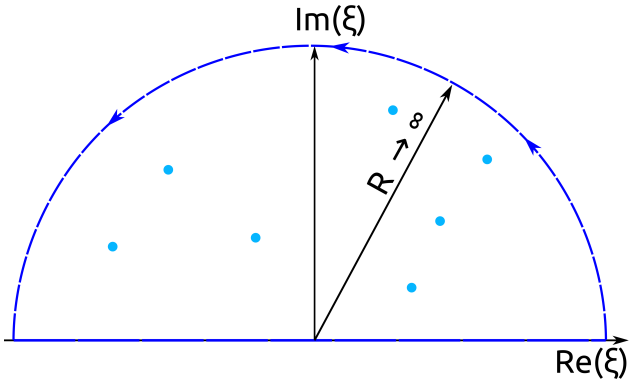


Рис. 1.5: Вычисление количества нулей комплексной функции.

Для нахождения отдельных собственных значений используются так

называемые тождества Ньютона $\{\sigma\}_{p=1}^{P}$:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{P}\xi_j &= \sigma_1,\\
\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+...+\xi_{P-1}\xi_P &= \sigma_2,\\
&...\\
(-1)^P\xi_1\xi_2...\xi_P &= \sigma_P.
\end{aligned}
\tag{1.83}
$$

которые связаны со значением интегралов:

$$
\begin{aligned}
s_1+\sigma_1 &= 0,\\
s_2+s_1\sigma_1+2\sigma_2 &= 0,\\
&...\\
s_P+s_{P-1}\sigma_1+...+s_1\sigma_{P-1}+P\sigma_P &= 0
\end{aligned}
\tag{1.84}
$$

Решая данную системы, мы получаем значения каждого тождества Ньютона, вычисляемые по рекуррентной формуле:

$$
\sigma_p=-\frac{1}{p}\left(s_p+\sum_{j=1}^{p-1}s_j\sigma_{p-j}\right),\quad p=1...P. \tag{1.85}
$$

В результате σ_p (с точностью до знака) являются формулами Виета для полинома

$$
M(z)=z^P+\sigma_1z^{P-1}+\sigma_2z^{P-2}+...+\sigma_{P-1}z+\sigma_P, \tag{1.86}
$$

нули которого совпадают с нулями исходного коэффициента $a(\xi)$. Применяя какой-либо алгоритм для нахождения нулей полинома, мы таким образом рассчитываем дискретный спектр $\{\xi_j\}_{j=1}^{P}$.

Одним из способов, которым могут быть найдены нули многочлена (1.86), является переход к задаче поиска собственных значений так называемой сопровождающей матрицы $C(M)$:

$$
C(M(z))=\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_P\\
1 & 0 & \dots & 0 & -\sigma_{P-1}\\
0 & 1 & \dots & 0 & -\sigma_{P-2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & -\sigma_1
\end{bmatrix}, \tag{1.87}
$$

для которой многочлен (1.86) является характеристическим многочленом. Для поиска собственных значений такой матрица существуют эффективные алгоритмы, например QR-алгоритм [32–34].

Глава 2

Исследование солитонной составляющей в стандартных оптических сигналов

2.1. Методика

Метод нелинейного преобразования Фурье позволяет исследовать нелинейную составляющую сигналов, которые были разработаны в рамках линейной теории. Математический аппарат нелинейного преобразования Фурье позволяет лучше понять структуру сигналов, а также их особенности, связанные с нелинейными эффектами. В стандартных сигналах могут (при некотором уровне мощности) содержаться когерентные структуры — солитоны. Солитоны представляют интерес с прикладной точки зрения, поскольку содержат четыре варьируемых параметра, в которых может кодироваться информация.

Сам факт наличия солитонов в сигнале может быть обнаружен с помощью прямой задачи Захарова-Шабата. Спектр оператора L в задаче (1.5), где функция $q(t, z)$ это исследуемый сигнал, может дать представление о структуре этого сигнала. Если в спектре существуют дискретные значения, то значит существуют и солитоны. Эта особенность будет использоваться для дальнейшего анализа стандартных оптических сигналов, при этом количество солитонов определяется по формуле (1.82). Для анализа сигналов используются численные алгоритмы, описанные в Главе 1, предварительно проверенные на тестовых сигналах: прямоугольном и сигнале Satsuma-Yajima.

Параметры сигнала, при которых могут существовать солитоны, зависят от системы. Для последующего исследования мы рассматриваем два параметра, присущих каждому сигналу. Ими являются L_1 и L_2 нормы, рассчитываемые следующим образом:

$$L_1(q) = \|q(t, z)\|_{L_1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |q(t, z)| dt, \tag{2.1}$$

$$L_2(q) = \|q(t,z)\|_{L_2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |q(t,z)|^2 dt, \tag{2.2}$$

где $q(t,z)$ — исследуемый сигнал, t и z — временная и пространственная координаты.

Для исследования были выбраны два стандартных способа мультиплексирования телекоммуникационных сигналов: мультиплексирование с частотным разделением каналов (OFDM — orthogonal frequency-division multiplexing) и мультиплексирование с разделением по длине волны (WDM — wavelength-division multiplexing). Без ограничения общности, мы фокусируемся на двух модуляционных форматах: фазовая манипуляция (PSK — phase-shift keying) и квадратурная амплитудная модуляция (QAM — quadrature amplitude modulation).

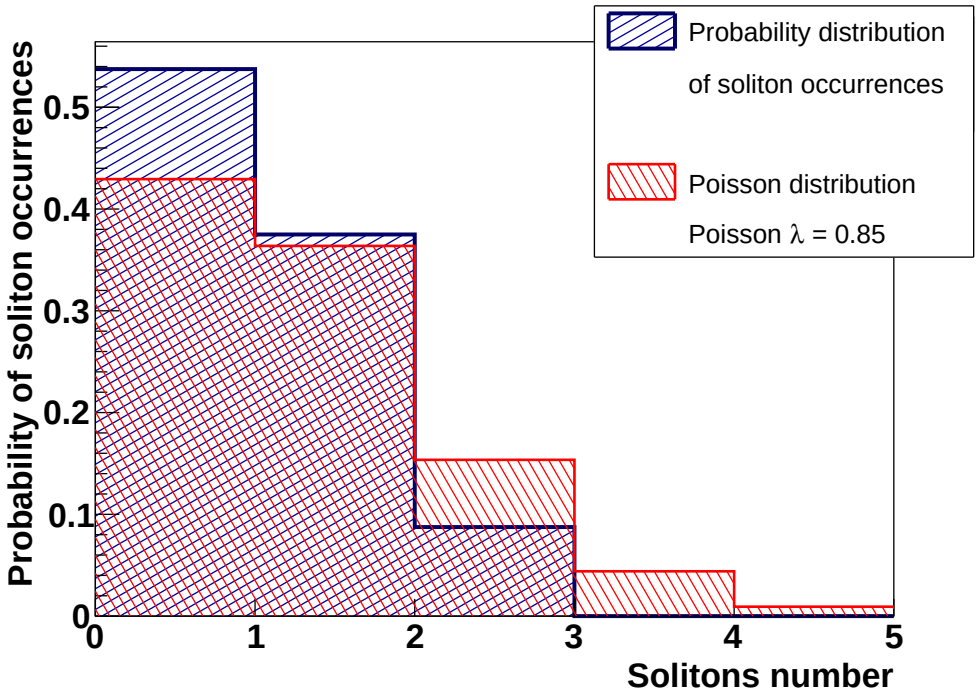


Рис. 2.1: Вероятность существования солитона в OFDM сигнале с QPSK модуляцией, 128 поднесущими и средней мощностью равной -18 дБм.

В общем случае в сигналах могут содержаться более одного солитона. В таком случае, если средняя мощность сигнала находится на пороге существования солитонов, то в наборе сигналов с случайными данными могут попадаться сигналы, как не содержащие, так и содержащие один

или несколько солитонов. При наборе статистики по таким сигналам мы получаем распределение вероятности существования солитонов в сигнале, представленное на Рис. 2.1. На рисунке также представлено распределение Пуассона ($P(x;\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^N/N!$) с значением $\lambda = 0.85$, полученное с помощью фитирования (подгонки) экспериментального распределения. Количество событий в теоретическом распределении равно 10^6, а в экспериментальном — 160. Рисунок 2.2 иллюстрирует случай, когда при заданных параметрах в сигнале всегда существуют солитоны, однако их число меняется в зависимости от исходных данных. В таком случае распределение хорошо описывается распределением Гаусса $G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ с математическим ожиданием μ и среднеквадратичным отклонением σ.

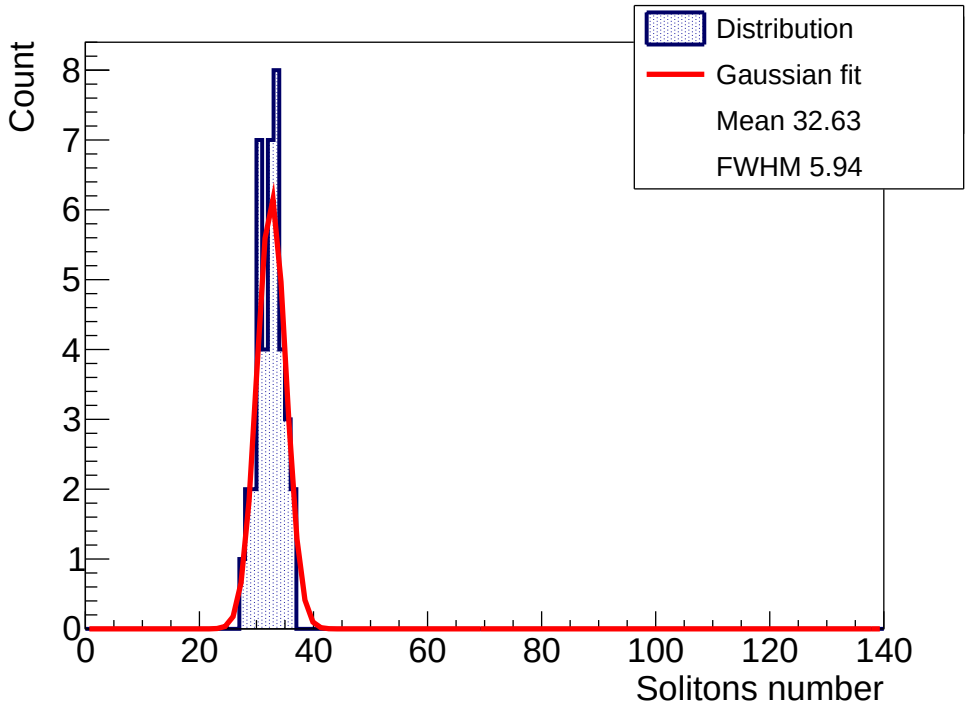


Рис. 2.2: Распределение количества солитонов в OFDM сигналах с 16-QAM модуляцией, 64 поднесущими и средней мощностью равной -11 дБм.

Ранее такие типы сигналов не исследовались на предмет содержания солитонов, поэтому на первом этапе мы изучали только факт существования солитонов, а не их число и характеристики. Важно отметить, что в данной части работы нас интересует сам факт наличия солитонов в сигнале, а не их количество, поэтому вероятность существования дискретного спектра вычисляется как отношение числа сигналов, в которых присутствует

хотя бы один солитон, к общему числу исследуемых сигналов с заданными параметрами.

Средняя мощность сигнала P_{ave} связана с L_2 нормой (2.2) как $P_{ave} = L_2/T$, где T — символьный интервал (длительность одного символа). В работе используются единицы измерения мощности мВт и дБм, которая рассчитывается, как P дБм $= 10\log_{10}(P$ [мВт]). Для численного моделирования мы использовали следующие параметры оптического волокна: дисперсия групповой скорости $\beta_2 = -21.5$ пс^{2}км$^{-1}$ и коэффициент нелинейности Керра $\gamma = 1.27$ Вт$^{-1}$км$^{-1}$.

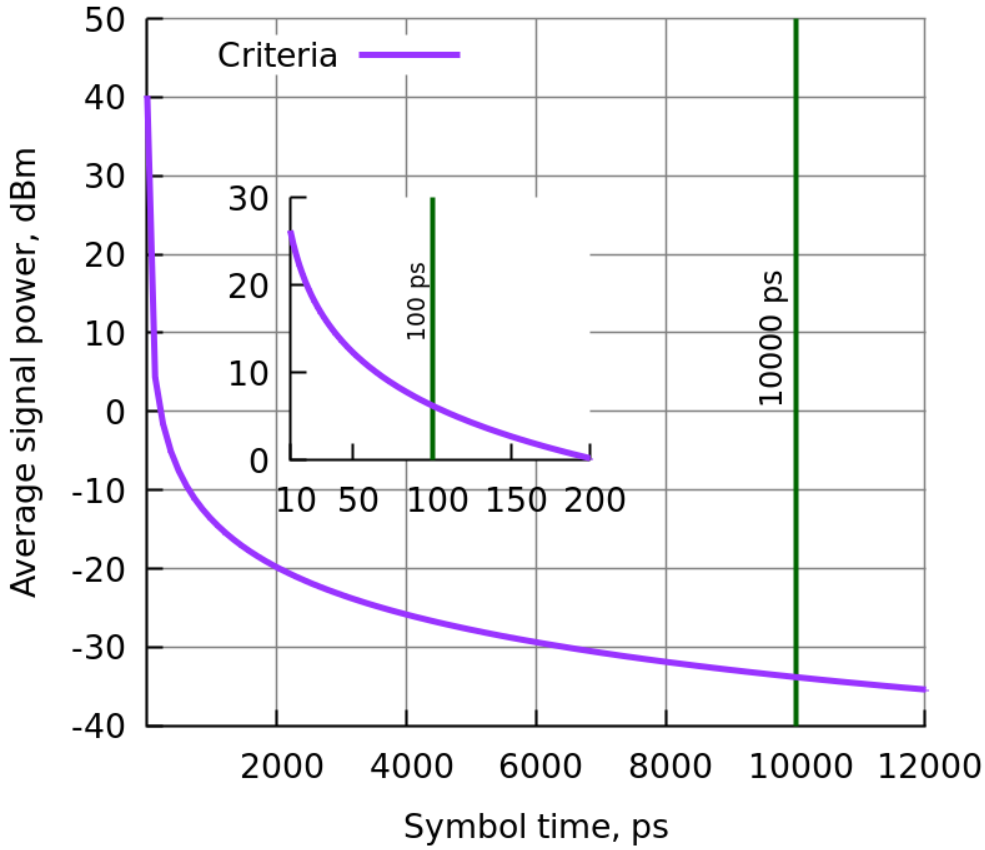


Рис. 2.3: Зависимость критерия 2.3 в размерных единицах от длительности символа T.

Для определения интервалов, в которых будут исследоваться оптические сигналы, обратимся к критерию существования солитонов (1.41), который в размерных единицах выписывается в виде

$$P_{ave} > \frac{|\beta_2|\pi^2}{4\gamma T_s^2}, \tag{2.3}$$

где T_s — исследуемый временной интервал, равный в этой работе длительности одного символа для OFDM или WDM сигнала. Рисунок 2.3 отображает зависимость минимальной средней мощности сигнала, выше которой могут существовать дискретный спектр, от длительности символа. Зеленые линии показывают длительности символов, исследуемых в данной работе. Для 10 нс порог находится ниже −30 дБм и составляет −33.8 дБм, в то время как для 100 пс порог намного больше и составляет 6.2 дБм. Отталкиваясь от этих значений, мы выбираем необходимые уровни мощности для исследования каждого типа сигнала. Необходимо отметить, что на графике представлена полная средняя мощность сигнала, однако для WDM систем чаще используется средняя мощность на один канал. Далее это учитывается при пересчете.

2.1.1. Модуляция

В работе используется квадратурно-амплитудная модуляция (QAM — quadrature amplitude modulation), которая дает значительные улучшения для передачи данных. Для высших порядков модуляции достигаются высокие скорости, однако требование на уровень шумом также возрастает. Основные параметры систем, в зависимости от констелляционной диаграммы, представлены в Таблице 2.1. Первые три типа модуляции в Таблице

Таблица 2.1: Форматы QAM и сравнение битовой скорости

Модуляция	Бит на символ	Символьная скорость
BPSK	1	1 × bit rate
QPSK	2	1/2 × bit rate
8PSK	3	1/3 × bit rate
16QAM	4	1/4 × bit rate
32QAM	5	1/5 × bit rate
64QAM	6	1/6 × bit rate

хоть и называются фазовыми манипуляциями (PSK — phase-shift keying),

но могут быть представлены через QAM модуляцию. Примеры констелляционных диаграмм, используемых в работе, представлены на Рис. 2.4.

2.1.2. Оценка качества передачи сигнала

Основными величинами для оценки качества передачи сигналов в оптической системе являются два параметра: EVM — error vector magnitude и BER — bit error ratio. EVM определяется по формуле

$$\mathrm{EVM}_m = \frac{\sigma_{\mathrm{err}}}{|E_{t,m}|},\ \sigma_{\mathrm{err}}^2 = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}|E_{\mathrm{err},i}|^2,\ E_{\mathrm{err},i} = E_{r,i} - E_{t,i}. \tag{2.4}$$

где полученный после распространения вектор E_r отклоняется на вектор E_{err} от переданного в идеальном случае вектора E_t, а BER связан с EVM как

$$\mathrm{BER} \approx \frac{(1-L^{-1})}{\log_2 L}\mathrm{erfc}\left[\sqrt{\frac{3\log_2 L}{(L^2-1)}\frac{1}{(k\mathrm{EVM}_m)^2\log_2 M}}\right]. \tag{2.5}$$

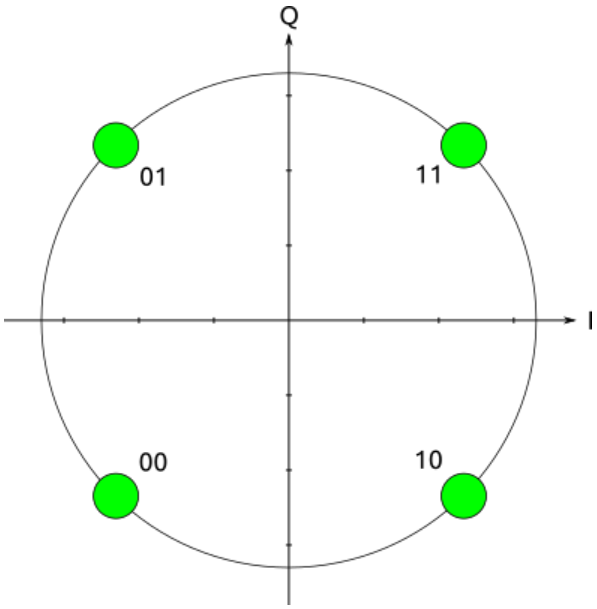
В формуле L это количество уровней сигнала, идентичных в каждом измерении созвездия, $\log_2 M$ — количество бит закодированных в каждом QAM символе. Подробнее о данных параметрах можно прочесть в [35].

Q^2-фактор связан с EVM как $Q^2 = 1/\mathrm{EVM}^2$. Этим определением мы будем пользоваться в дальнейшем для оценки качества передачи системы. Максимум Q^2-фактора соответствует наиболее оптимальным параметрам передачи.

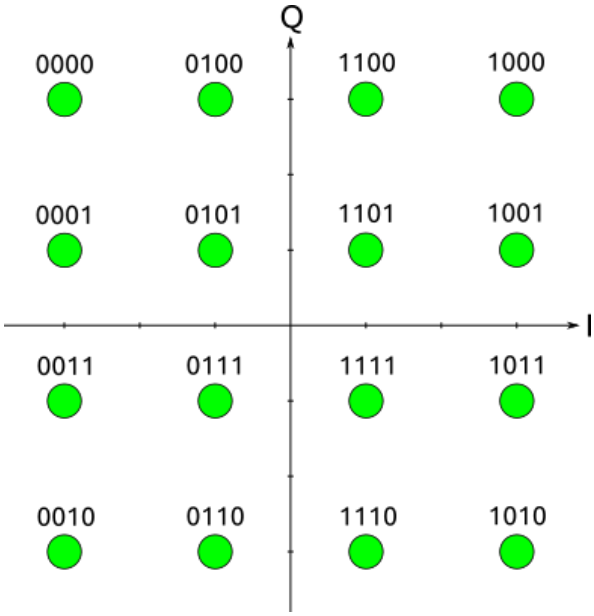
2.2. OFDM сигнал

2.2.1. Формирование сигнала

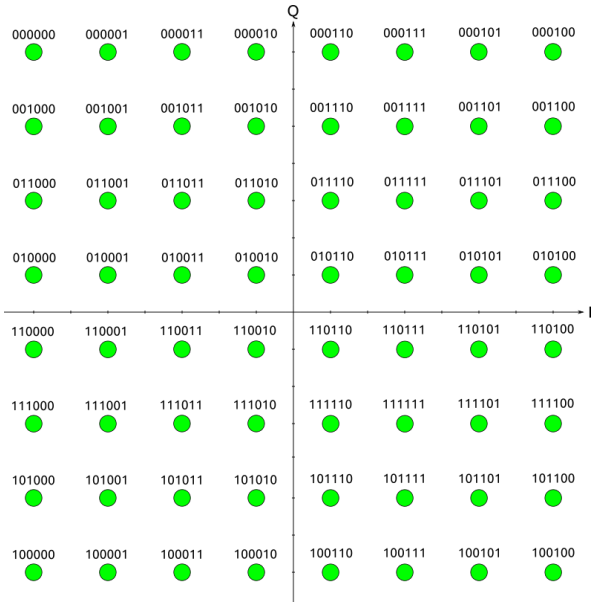
OFDM сигнал сочетает модуляцию и мультиплексирование. Для формирования символа используется термин "поднесущая" (в англ. варианте subcarrier), которая в действительности является одной из Фурье-гармоник в частотном пространстве, из которых формируется сигнал. Один изолированный символ на временном промежутке длительностью T представляет



а)



б)



в)

Рис. 2.4: Констелляционные диаграммы для (а) QPSK, (б) 16-QAM и (в) 64-QAM модуляции.

из себя сумму независимых поднесущих, промодулированных согласно выбранному типу модуляции:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kt/T}, \tag{2.6}$$

где N — количество поднесущих, T — длительность символа, X_k — данные. OFDM сигнал состоит из последовательности таких символов, разделенных защитным интервалом T_g, который в данном случае мы не используем. В зависимости от типа модуляции, выбирается соответствующая констелляционная диаграмма (Рис. 2.4).

На практике количество поднесущих выбирается как $N = 2^p$ (p — целое положительное число), для того, чтобы использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). Схема формирования OFDM сигнала представлена на Рис. 2.5. На вход подаются последовательные данные и разбиваются на N параллельных потоков. Каждый поток данных кодируется согласно выбранному формату модуляции (QPSK или QAM). Каждый отдельный поток соответствует определенной частоте, а закодированные данные определяют комплексную амплитуду для данной частоты. Полученные таким образом N чисел используются далее в БПФ, результатом которого является искомый OFDM символ. Последовательность таких символов формирует полный OFDM сигнал, который используется для передачи информации. Для декодирования сигнала процедура выполняется в обратном порядке: выполняется обратное БПФ, данные декодируются и восстанавливается их порядок.

2.2.2. Результаты

В размерных единицах измерения мы исследовали OFDM символы с 10 нс длительностью и QPSK, 16-, 64- и 1024-QAM типами модуляции. Количество поднесущих менялось от 16 до 1024 при полном размере БПФ равном 1024. В первую очередь мы проверили меняется ли количество солитонов в сигнале при варьировании размера БПФ. О казалось, что начиная с размера БПФ равном 128, при увеличении размера БПФ, количество солитонов не изменяется.

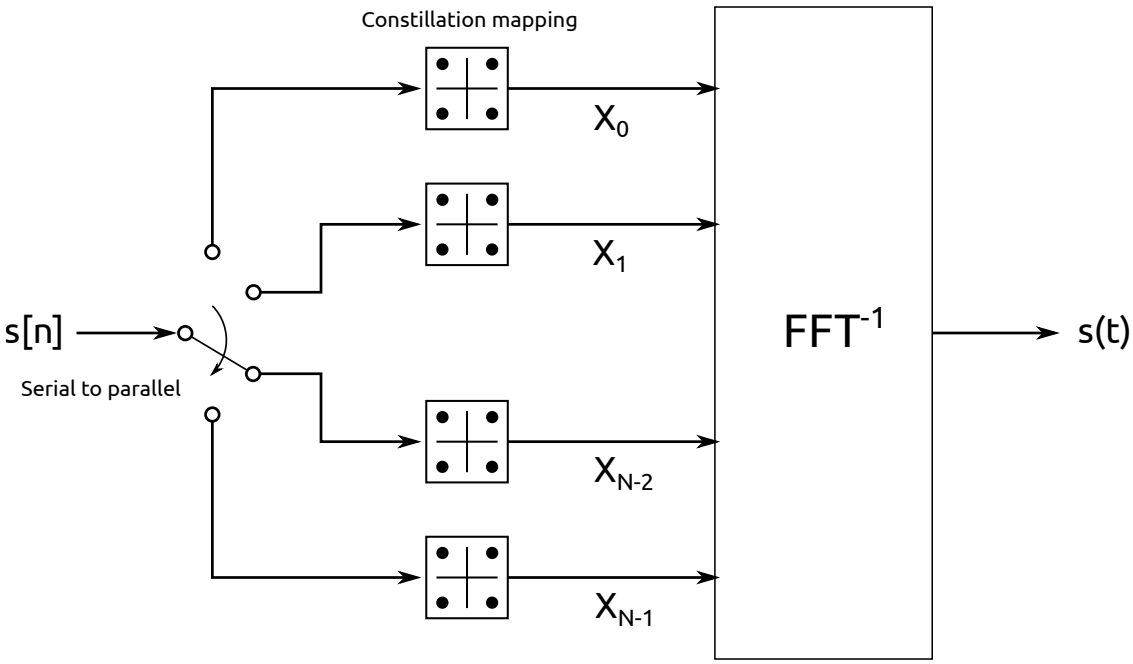


Рис. 2.5: Формирование OFDM сигнала

Далее мы набирали статистику из 200 сигналов с случайными входными данными при фиксированных параметрах для каждой точки на графиках. На Рисунке 2.6 показано как изменяется вероятность содержания солитона в сигнале в зависимости от L_1 нормы для сигнала с 128 поднесущими и QPSK и 16-QAM модуляцией. Первый уровень L_1 нормы, рассчитанный по формуле (1.33) и равный 1.57, лежит левее за пределами графика. Далее в работе мы сосредоточились на исследовании зависимости вероятности существования солитонов в сигнале от значения средней мощности сигнала. Это обусловлено тем, что данная характеристика имеет физический эквивалент и может быть экспериментально рассчитана в эксперименте.

На Рисунке 2.7 (а) представлены результаты зависимости вероятности существования солитонов в OFDM сигналах от средней мощности с 16-QAM от средней мощности сигнала. При увеличении количества поднесущих необходимая для существования солитонов мощность увеличивается. Этот эффект может найти объяснение в Рисунке 2.7 (б), который показывает аналогичный график с учетом того, что средняя мощность делится на каждый "канал" , под которым понимается соответствующая поднесущая. На графике видно, что в действительности вероятность существова-

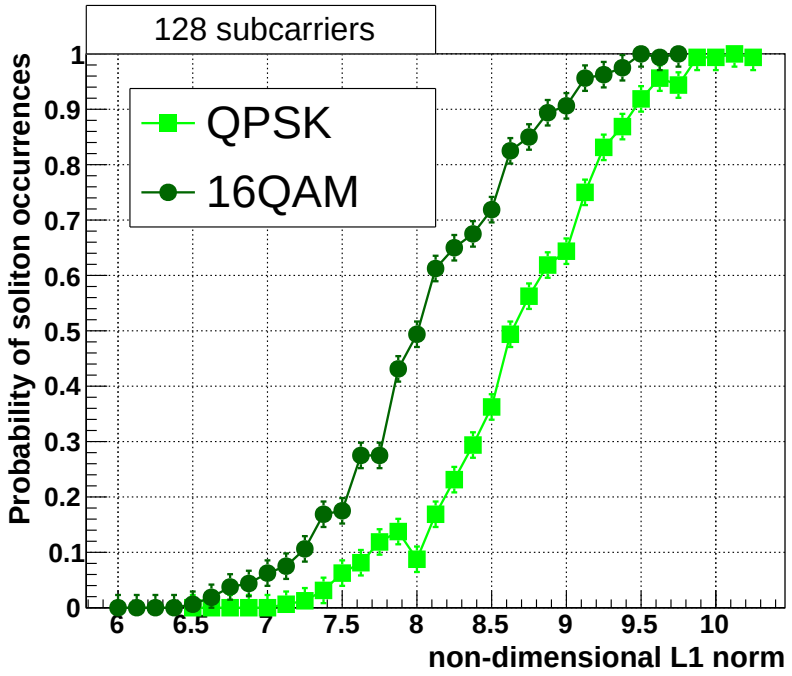
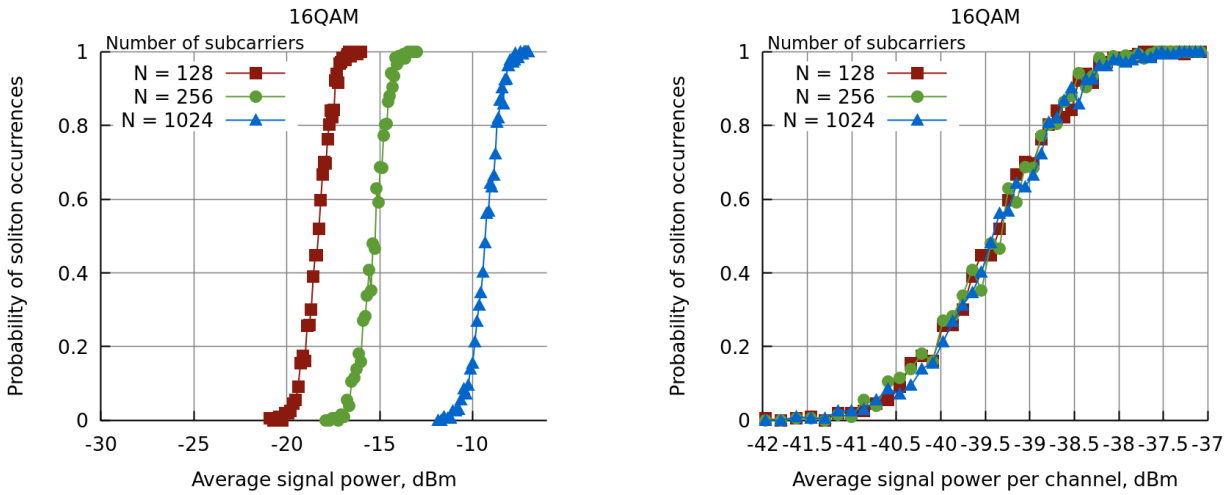


Рис. 2.6: Зависимость вероятности содержания солитонов в OFDM сигналах с 128 поднесущими и QPSK и 16-QAM модуляцией.

ния определяется удельной мощностью каждого канала, которая не зависит от общего числа поднесущих. Как следствие, при увеличении числа поднесущих возрастает и общая мощность сигнала, необходимая для существования солитонов. Аналогичный эффект наблюдается и для других типов модуляции (Рис. 2.8). Из полученных результатов можно сделать вывод, что полоса средней мощности на один канал находится в промежутке от -42 дБм до -37 дБм. Исходя из этих данных, мы может предсказывать границы существования солитонов для других сигналов.

Однако, тип модуляции также влияет на распределение вероятности. Рисунок 2.9 демонстрирует, что при увеличении порядка констелляционной диаграммы, а значит и при увеличении количества бит информации, закодированной в одном символе, необходимая средняя мощность сигнала для существования солитонов уменьшается. Этот факт хорошо заметен при сравнении QPSK и других типов модуляции. Независимо от количества поднесущих наблюдается тенденция, что для QPSK модуляции средняя мощность сигнала выше, чем для других. Если мы перейдем к зависимости от средней мощности на один канал, то ситуация не изменится (Рис. 2.10).

Как и ожидалось, для сложного сигнала уровень L_1 и L_2 нормы (а



а) б)

Рис. 2.7: Зависимость вероятности существования солитонов для OFDM сигналов с 16-QAM и длительностью символа 10 нс от (а) средней мощности сигнала, (б) средней мощности сигнала на один канал.

значит и P_{ave}), при которой в сигнале существуют солитоны, выше, чем для простого прямоугольно сигнала. Это согласуется и с критерием (2.3), который может быть также использован для предварительно анализа в других существующих системах.

На следующем этапе необходимо сравнить полученные уровни мощностей с уровнями оптимальными для передачи. На Рисунке 2.11 (б) показана зависимость Q^2-фактора для OFDM сигнала с 16-QAM, 128 поднесущими и длительностью 10 нс от средней мощности сигнала. Параметры системы были определены ранее в разделе 2.1. Максимум Q^2-фактор в такой системе достигает при уровнях мощностей -15 — -14 дБм. На Рисунке 2.11 (а) видно, что при таких уровнях солитоны существуют во всех сигналах.

В общем случае солитоны и дисперсионные волны распространяются по волокну различным образом. Самое главное отличие заключается в том, что дисперсия для солитонов сбалансирована нелинейными эффектами. Само существование солитонов в стандартном OFDM сигнале потенциально должно вносить определенный вклад при распространении. Понимание этого факта может повлиять на способы кодирования и модуляций сигналов в оптической коммуникации, поскольку может привести к улучшению эффективности оптических линий связи. Однако на практике появление

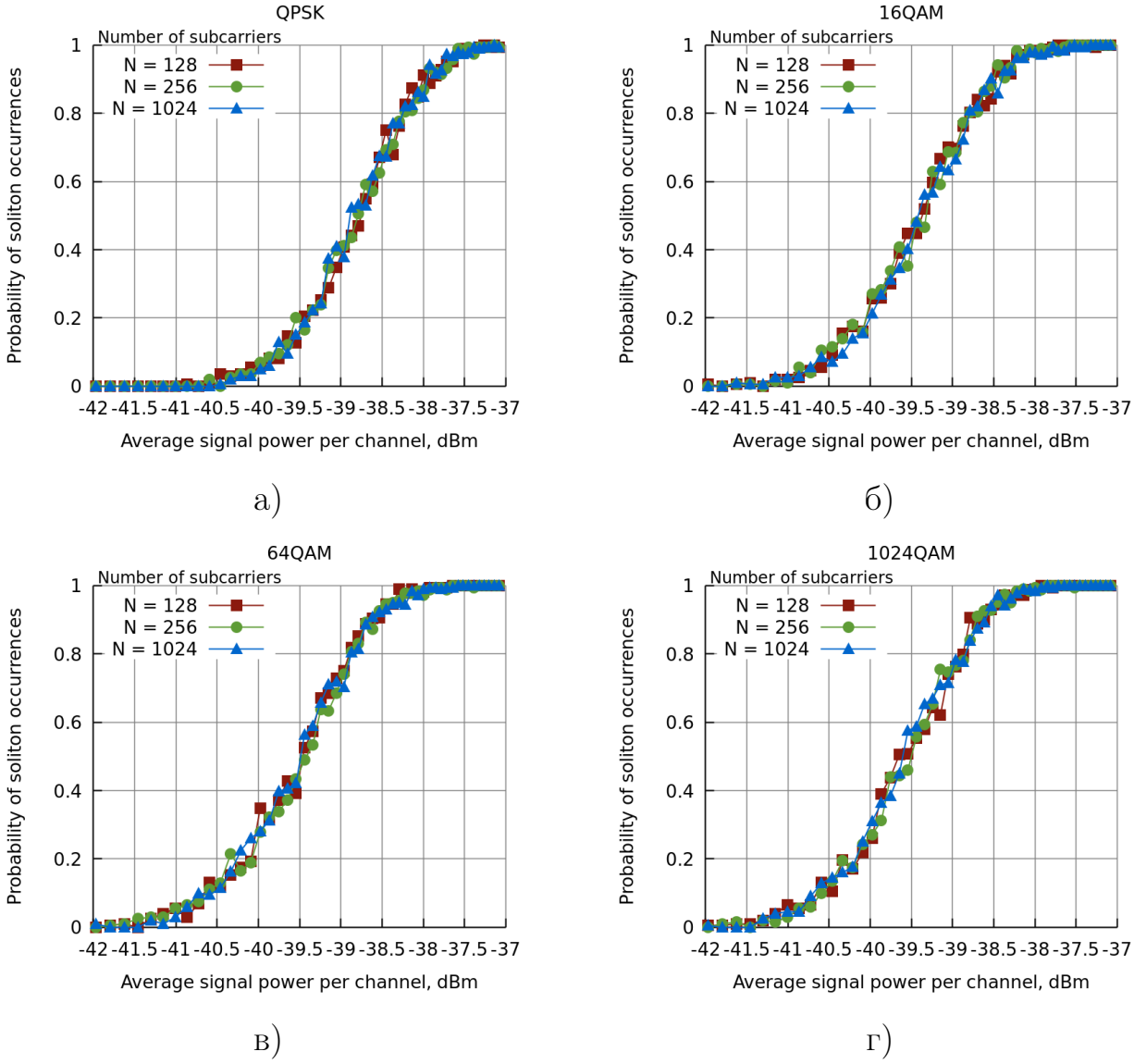
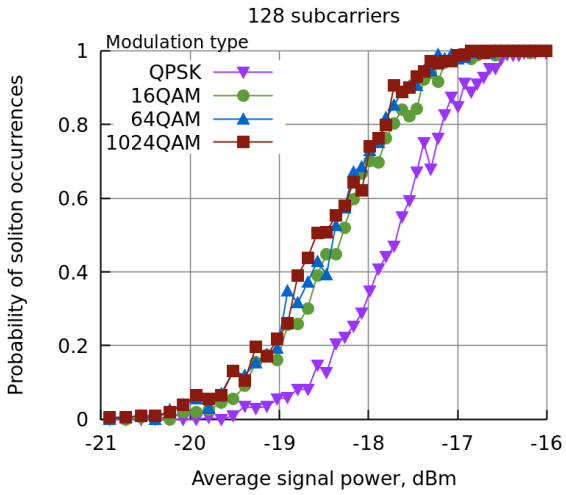
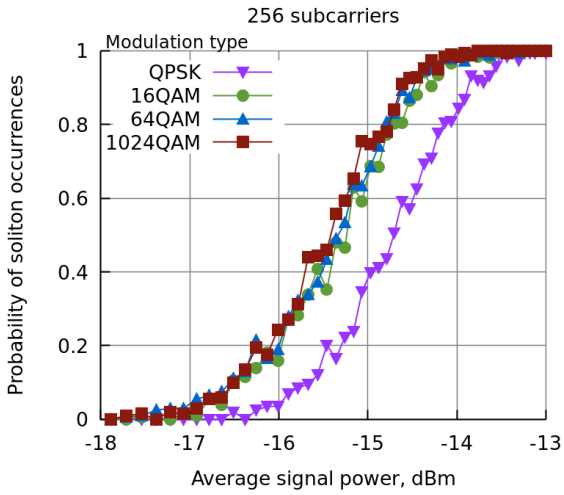


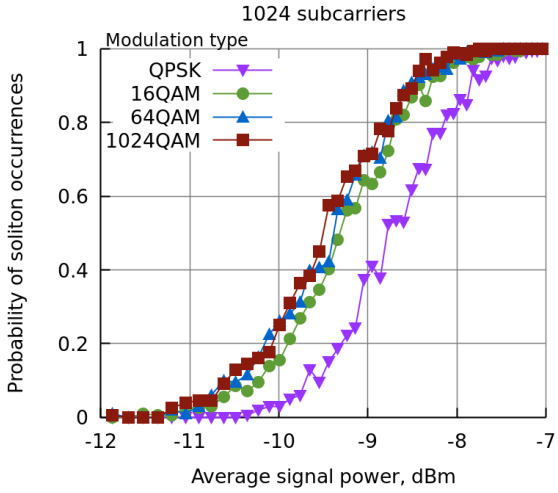
Рис. 2.8: Зависимость вероятности существования солитонов в OFDM символе с длительностью 10 нс и (а) QPSK, (б) 16-QAM, (в) 64-QAM, (г) 1024-QAM модуляцией от средней мощности сигнала на один канал.



а)



б)



в)

Рис. 2.9: Зависимость вероятности существования солитонов в OFDM символе с длительностью 10 нс и (а) 128, (б) 256, (в) 1024 поднесущими от средней мощности сигнала.

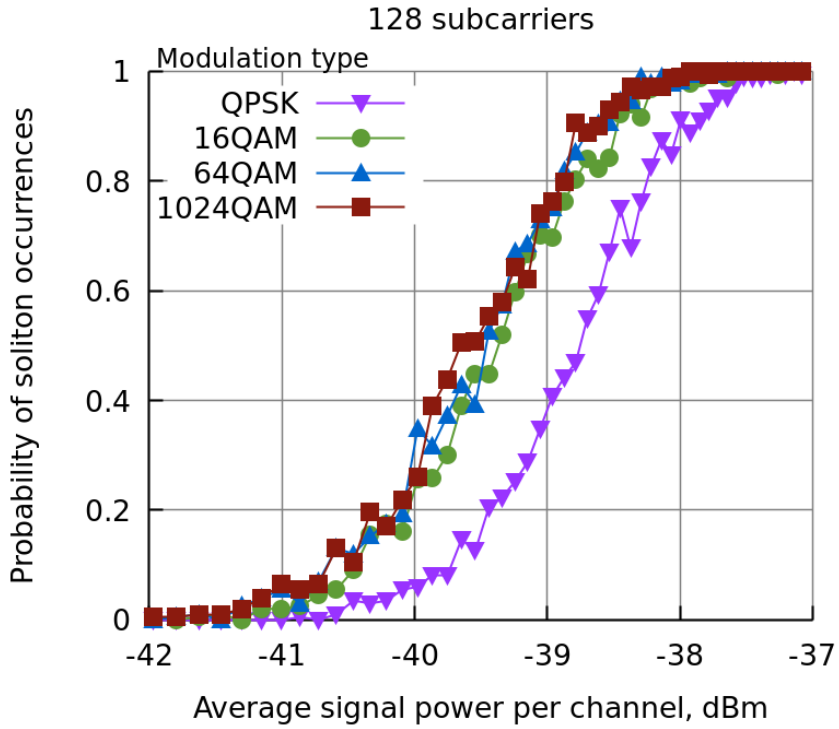
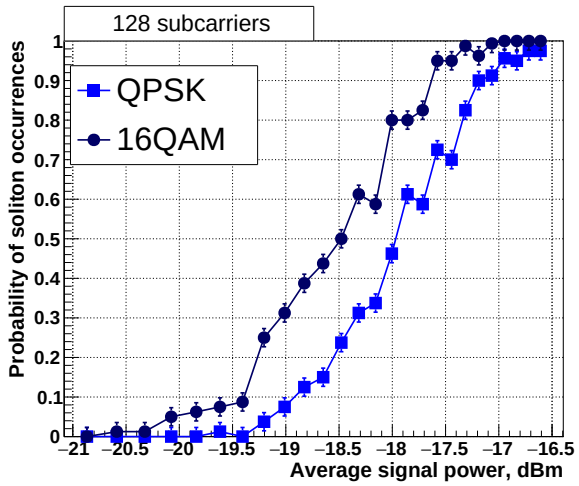
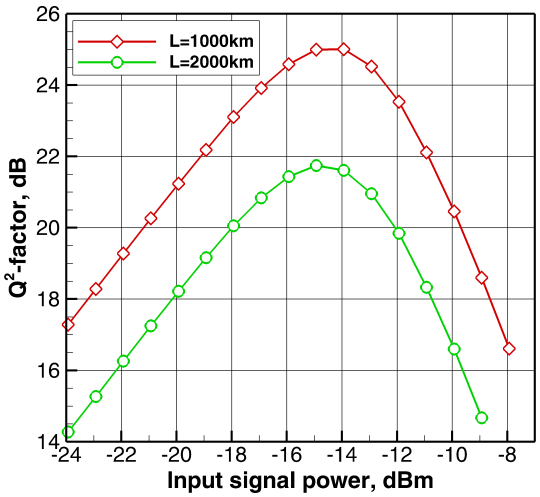


Рис. 2.10: Зависимость вероятности существования солитонов в OFDM символе с длительностью 10 нс и 128 поднесущими от средней мощности сигнала на один канал.



а)



б)

Рис. 2.11: (а) Зависимость вероятности существования солитона, (б) зависимость Q^2-фактора для OFDM сигнала с 128 поднесущими и 16-QAM от средней мощности сигнала.

солитонов не оказывает большого влияние на динамику распространения OFDM сигнала при полученных уровнях мощности. При более высоких уровнях уже возможно наблюдать эволюцию отдельных солитонов в общем сигнале, однако эти события редки, и необходимы дополнительные исследования, чтобы определить параметры и степень влияния солитонов на сигнал.

2.3. WDM сигнал

2.3.1. Формирование сигнала

Технология спектрального уплотнения каналов (WDM — wavelength-division multiplexing) позволяет передавать одновременно несколько информационных каналов по одному оптическому волокну на разных частотах. Она использует уже существующие линии связи и позволяет организовать двустороннюю передачу. Принцип WDM основан на том, что в одном оптоволоконном канале можно передавать информацию одновременно на нескольких длинах волн. Каждая отдельная длина волны называется "каналом" , и далее мы придерживаемся данной терминологии.

Один изолированный WDM символ формируется как сумма несущих функций, промодулированных в соответствии с их несущей частотой и кодируемыми данными:

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{i\omega_n t} C_n f(t), \tag{2.7}$$

N — количество поднесущих, ω_n — несущая частота, C_n — данные (соответствующие констелляционной диаграмме), $f(t)$ — несущая функция.

Без ограничения общности, мы рассматриваем следующую несущую return-to-zero (RZ) функцию (Рис. 2.12 (a)):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right], \ 0 \le t \le \frac{T}{4} \ \text{ or } \ \frac{3T}{4} \le t \le T \\ 1, \ \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4} \end{cases} \tag{2.8}$$

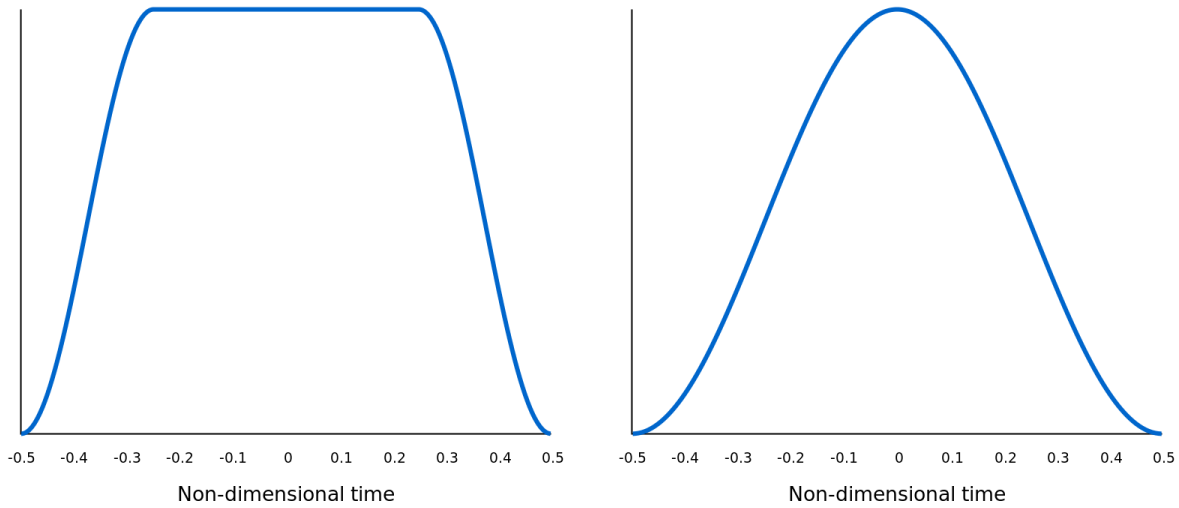


Рис. 2.12: Примеры несущих функций для WDM сигнала

В качестве несущей функции можно использовать также и другие RZ функции, например

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right], \ 0 \le t \le T, \tag{2.9}$$

представленную на Рис. 2.12 (б). Также используется широко распространенная в коммуникации функция в виде фильтра с характеристикой типа "приподнятый косинус" (ФПК), также известный в литературе, как raised-cosine filter. Во временном пространстве она выражается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4T}\ \mathrm{sinc}\left(\dfrac{1}{2\beta}\right), \ t = \pm\dfrac{T}{2\beta} \\ \dfrac{1}{T}\ \mathrm{sinc}\left(\dfrac{t}{T}\right)\dfrac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1-(\frac{2\beta t}{T})^2}, \ \text{иначе} \end{cases} \tag{2.10}$$

Однако мы сосредоточимся на исследовании сигналов с несущей функцией в виде (2.10), а другие форматы оставлены для будущей работы.

Данные кодируются по выбранному формату модуляции, а несущая частота ω_n вычисляется по формуле

$$\omega_n = \Delta\omega \cdot n, \quad n = -N/2...N/2, \tag{2.11}$$

где $\Delta\omega$ это межканальное расстояние, равное в этой работе 25 ГГц. Длительность одного символа равна 100 пс.

2.3.2. Результаты

На этом этапе работы мы исследовали WDM символы с QPSK, 16-, 64-, 1024-QAM и варьировали количество каналов от 9 до 51. Аналогично OFDM сигналам, мы набрали статистику из 200 WDM символов для каждого набора параметров. Зависимость вероятности существования солитонов в сигнале от средней мощности сигнала на один канал для разных типов модуляции и разного количества каналов представлена на Рис. 2.13. Хочу подчеркнуть, что в отличии от OFDM сигнала, на графиках представлена средняя мощность, приходящаяся на один WDM канал.

Сравнивая график на Рис. 2.13 (а) с другими, можно отметить, что для QPSK модуляции уровень мощности намного выше, чем для других типов модуляции, и находится в узком промежутке от 5.8 дБм до 7 дБм. Для 16-, 64-, 1024-QAM полоса составляет от 2 дБм до 6 дБм. При увеличении количества каналов пороговая мощность снижается, а разница мощностей для разного числа каналов сохраняется для всех типов модуляции. Для WDM сигнала мы наблюдаем такой же эффект, как и для OFDM сигналов: при увеличении порядка модуляции пороговая мощность уменьшается (Рис. 2.14). Помимо этого, WDM сигналы с QPSK модуляцией имеют пороговую мощность существования солитонов намного больше, чем с другими типами модуляции. Также, для WDM сигналов разница между 16-, 64- и 1024-QAM модуляциями существенней, чем в OFDM сигналах. Например, при увеличении количества каналов мы можем разделить 16-QAM и 64-QAM для 51 канала (Рис. 2.14 (г)).

Эти особенности демонстрируют, что, несмотря на схожие процессы формирования сигналов, WDM и OFDM системы имеют разную внутреннюю структуру, а также по-разному зависят от выбранных параметров.

Для оценки уровней мощностей, оптимальных для распространения сигнала, мы рассчитали зависимость Q^2-фактора от мощности на один канал, представленную на Рис. 2.15. Оптимальный уровень для передачи составляет -14 дБм и находится в диапазоне мощностей, где солитоны не существуют. Это представляет принципиальное отличие от OFDM сигнала, для которого оптимальный уровень мощности соответствовал сигналам, содержащим солитонную составляющую.

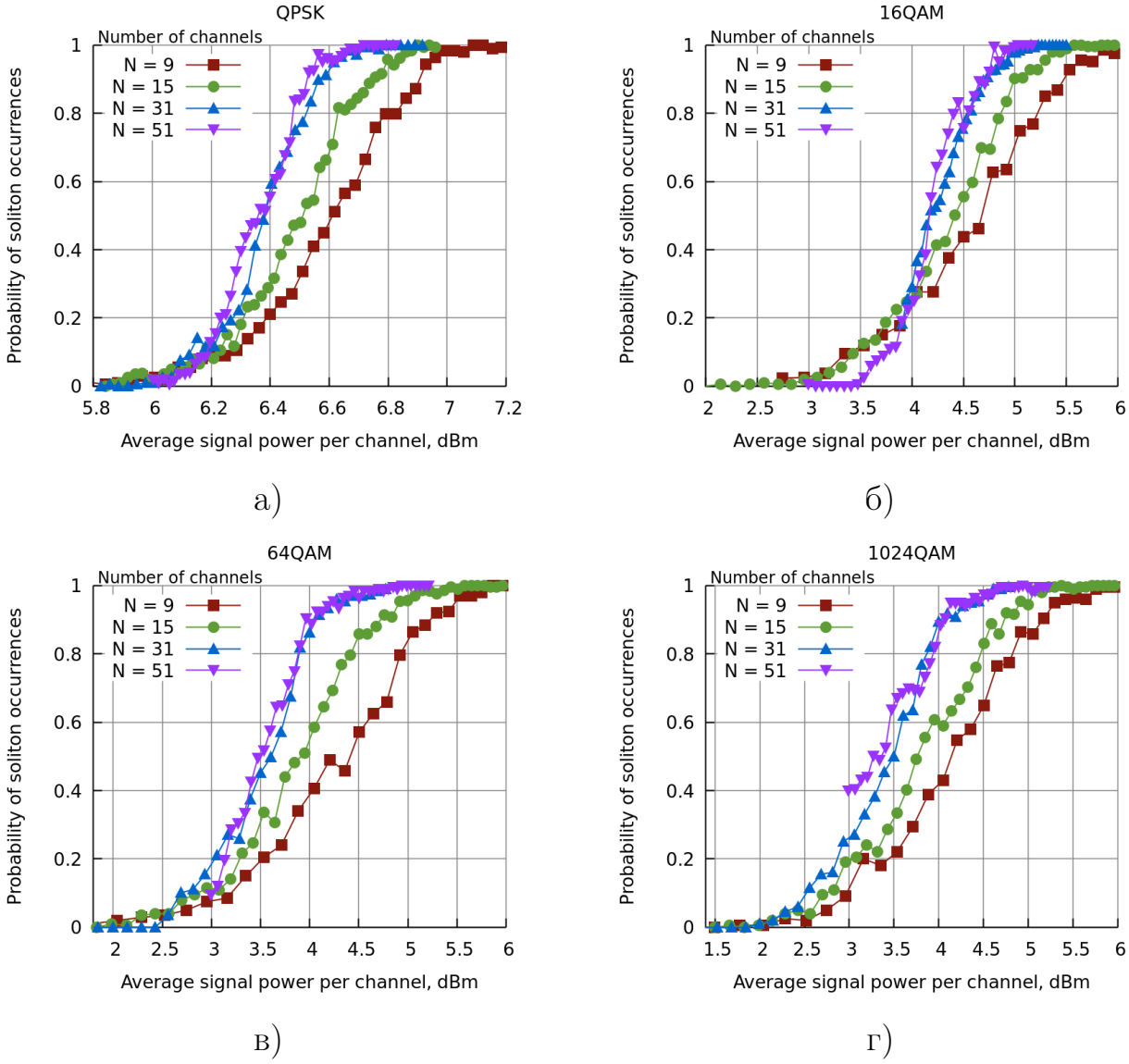


Рис. 2.13: Зависимость вероятности существования солитонов в WDM сигнале от средней мощности сигнала на один канал с длительностью 100 пс и (а) QPSK, (б) 16-QAM, (в) 64-QAM, (г) 1024-QAM модуляцией

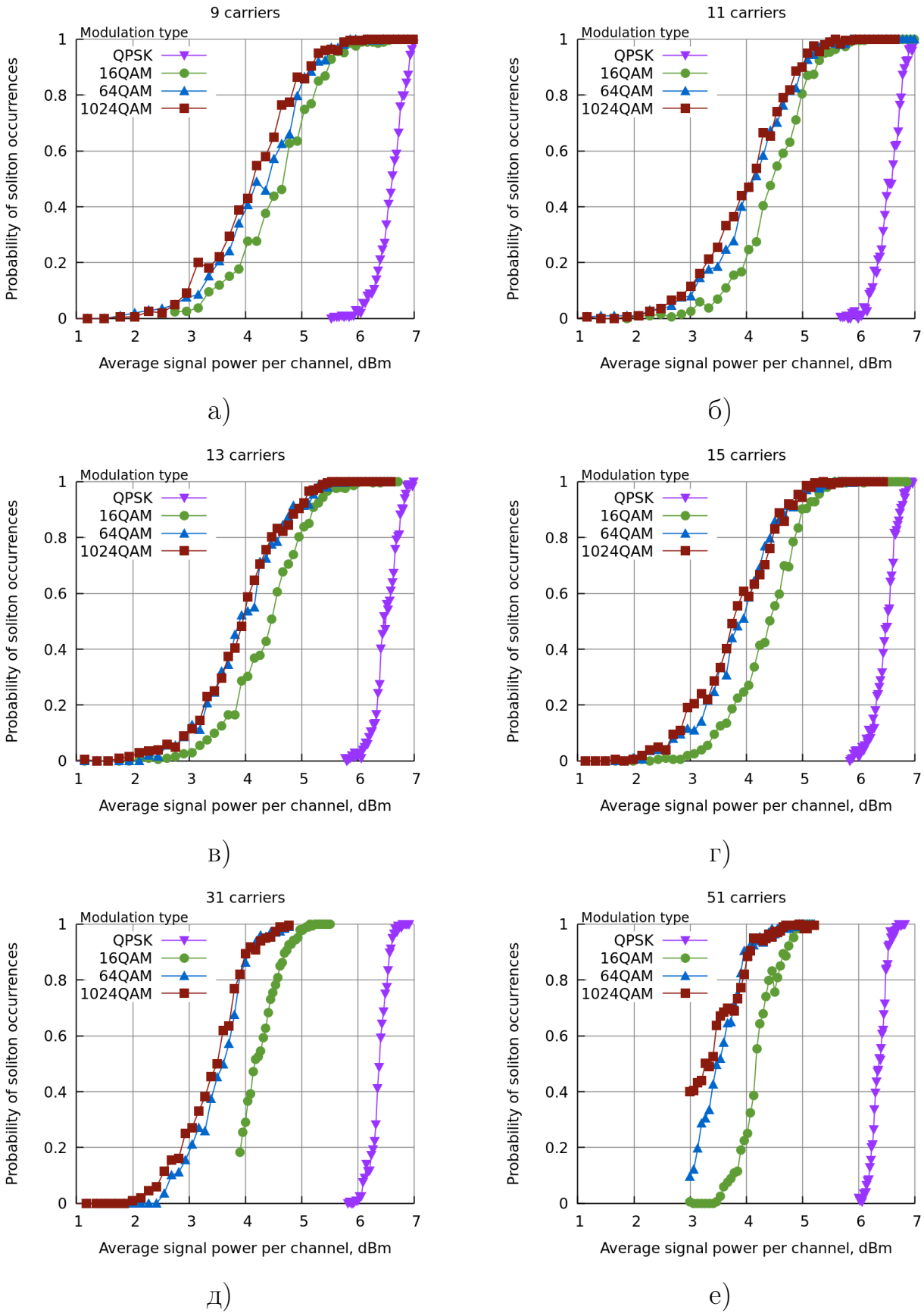


Рис. 2.14: Зависимость вероятности содержания солитонов в WDM сигнале с (а) 9, (б) 11, (в) 13, (г) 15, (д) 31 и (е) 51 каналами.

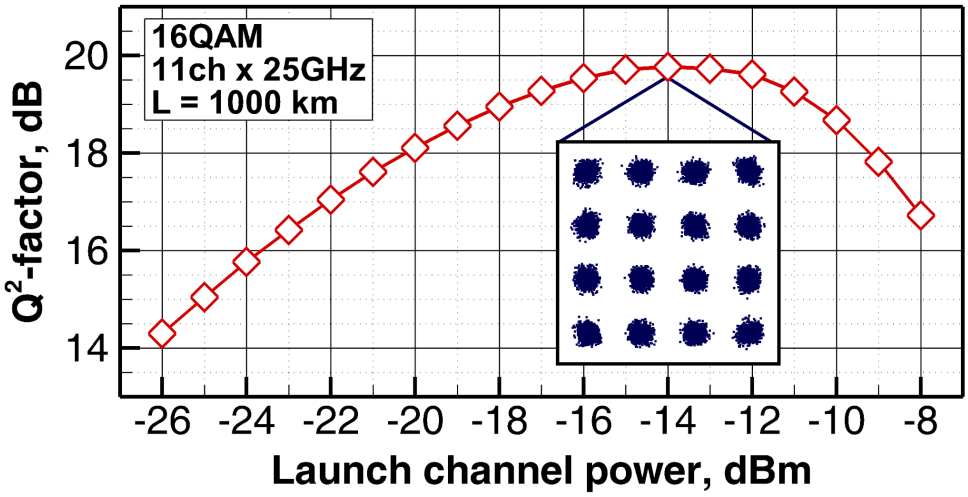


Рис. 2.15: Зависимость Q^2-фактора от мощности WDM сигнала с длительностью 100 пс и межканальным расстоянием 25 ГГц.

Тот факт, что солитоны не существуют в данном диапазоне, также представляет интерес в рамках нелинейной теории передачи данных. Если солитонов не существует, то Ω_{sol} (1.18) отсутствует в формуле вычисления ядра задачи Захарова-Шабата (1.7). Это значит, что оставшийся член (1.19), представляющий из себя простое преобразование Фурье, полностью определяет ядро. В таком случае, существующие алгоритмы могут быть упрощены, и нет необходимости вычислять полный нелинейный спектр для осуществления нелинейного преобразования Фурье. Это свойство может быть использовано для улучшения передачи по оптическим линиям связи.

В другом случае, при увеличении мощностей передачи, полученные результаты могут помочь оценить условия, когда будут существовать солитоны в WDM системе. В данных солитонах может быть закодирована полезная информация, или же они могут использоваться как специальные триггеры, которые будут сигнализировать о сбоях работы системы.

Полученные результаты для WDM и OFDM систем показывают, что когерентные структуры являются неотъемлемой частью данных систем, а значит должны исследоваться наравне с другими эффектами. Результаты представляют интерес, поскольку особенности, связанные с нелинейностью, могут быть оценены и использованы на практике. Для OFDM сигна-

лов уровни мощности, оптимальные для распространения, при определенных конфигурациях совпадают с режимом, когда в сигналах точно существуют солитоны. Для WDM сигналов существующие системы используют режимы, когда солитоны отсутствуют, что тоже может быть использовано для уточнения и улучшения существующих моделей.

Заключение

Одной из целью этой работы было показать, что существующие линейные системы в действительности нелинейные, и преодолеть фундаментальный барьер линейной парадигмы передачи данных. Нелинейные эффекты несут в себе потенциальную возможность увеличить пропускную способность уже существующих систем. Эта работа является одним из первых шагов в исследовании нелинейного преобразования Фурье, как нового фундамента для будущих волоконно-оптических систем связи. Предполагается, что будущие волоконно-оптические системы связи, основанные на NFT, превысят пределы пропускной способности существующих систем WDM. Полученные результаты демонстрируют, что уже сейчас в стандартных оптических сигналах возникают сугубо нелинейные эффекты, которые не учитываются в рамках линейной теории.

В будущем нам также будет необходимо понять, как оптические сигналы могут модулироваться и демодулироваться в соответствии с новой парадигмой, и как физические ограничения (например, ширина полосы частот или ограничение мощности) могут учитываться и отображаться в пространстве сигналов (в области нелинейного спектра), чтобы перейти от математической основы к фактической реализации системы. Чтобы избежать возможных проблем из-за цифровой обработки, можно продумать схемы для полностью оптической обработки (аналогично оптической реализации преобразования Фурье для полностью оптического OFDM) или схемы для сигналов мультиплексирования и демультиплексирования в области нелинейного спектра (по аналогии с подходами OTDM — Optical Time Division Multiplexing и WDM).

Другим важным моментом является понимание и моделирование поведения всей системы передачи. Поскольку некоторые эффекты распространения и системные нарушения не могут быть учтены в рамках интегрируемых уравнений (затухание, PMD, лазерный фазовый шум), точная аналитическая модель системы недоступна. Кроме того, неясно как линейный шум от оптических усилителей влияет на сигнал в области нелинейного спектра. Поэтому нам необходимо реализовать точный численный симу-

лятор, который можно использовать для: проверки поведения системы и изучения ее отклонений от аналитической модели, определения статистической характеристики канала, оценки достижимых скоростей передачи информации, оптимизации модуляции и кодировании.

Модель также позволит нам исследовать потенциал передачи на больших нелинейных и дисперсионных длинах, где NFT-системы позволят использовать новые режимы параметров, которые не достижимы при обычных схемах линейной передачи даже при использовании нелинейной компенсации.

Потенциал нелинейного преобразования Фурье огромен. Ожидается, что результаты разработки алгоритмов НПФ окажут влияние, выходящее за рамки основного способа их применения. Быстрые численные алгоритмы и связанные с ними математические методы, будучи очень универсальными, могут найти много междисциплинарных приложений, например:

- в фотонике для синтеза волоконных решеток [36], для разработки перспективных волоконно-лазерных устройств [37] и для характеристики экстремальных событий в виде формирования волн-убийц [38];
- в гидродинамике для нелинейного анализа океанских волн [39];
- в геофизике для анализа сейсмологических эффектов [40, 41]

и многих других, аналогичных линейному преобразованию Фурье.

Список литературы

1. *Cvijetic M., Djordjevic I.* Advanced Optical Communication Systems and Networks. Artech House applied photonics series. — Artech House, 2013. — ISBN: 9781608075553.
2. *Hasegawa A., Nyu T.* Eigenvalue communication // *Journal of Lightwave Technology.* — 1993. — Vol. 11, no. 3. — P. 395–399.
3. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // *Soviet Physics JETP.* — 1972. — Vol. 34, no. 1. — P. 62.
4. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion // *Appl. Phys. Lett.* — 1973. — Vol. 23.
5. *Mollenauer L. F., Stolen R. H., Gordon J. P.* Properties of optical soliton in a three level medium with quintic nonlinearity // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45, no. 13. — P. 1095.
6. *Hasegawa A., Kodama Y.* Signal transmission by optical solitons in monomode fiber // *Proceedings of the IEEE.* — 1981. — Vol. 69, no. 9. — P. 1145–1150.
7. *Doran N. J., Blow K. J.* Solitons in optical communications // *IEEE Journal of Quantum Electronics.* — 1983. — Vol. 19, no. 12. — P. 1883–1888.
8. *Rutherford E.* Lxxix. the scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* — 1911. — Vol. 21, no. 125. — P. 669–688.
9. Method for solving the korteweg-devries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Physical review letters.* — 1967. — Vol. 19. — P. 1095–1097.
10. *Lax P.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Comm. Pure Applied Math.* — 1968. — P. 467–490.
11. *J. S. R.* Report on waves // *Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science.* — 1844. — P. 311–390.
12. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* — 1965. —

Vol. 15. — P. 240–243.

13. *Faraday M.* Xvii. on a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. — 1831. — Vol. 121.
14. *Васильев А. В., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы. — Москва: Наука, 1987.
15. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* Автосолитоны. — Москва: Наука, 1991.
16. *Shen Y.* The Principles of Nonlinear Optics. Pure & Applied Optics Series: 1-349. — Wiley, 1984. — ISBN: 9780471889984.
17. *Butcher P., Cotter D.* The Elements of Nonlinear Optics. — 1990.
18. *Boyd R. W.* Nonlinear optics // *San Diego: Academic Press.* — 1992.
19. *Randoux S., Suret P., El G.* Inverse scattering transform analysis of rogue waves using local periodization procedure // *Scientific Reports.* — 2016. — Vol. 6. — P. 29238.
20. *Аскарьян Г. А.* Предсказание о существовании волноводного режима при распространении электромагнитного луча // *ЖЭТФ.* — 1962. — Vol. 42. — P. 1567.
21. Theory of solitons: the inverse scattering method / S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov. — Springer Science & Business Media, New York, 1984.
22. *Klaus M., Shaw J. K.* On the eigenvalues of zakharov-shabat system // *J. Math. Anal.* — 2003. — Vol. 34, no. 4. — P. 759–773.
23. *Boffetta G., Osborne A. R.* Computation of the direct scattering transform for the nonlinear schroedinger equation // *Journal of computational physics.* — 1992. — Vol. 102, no. 2. — P. 252–264.
24. *Ablowitz M. J., Ladik J.* Nonlinear differential-difference equations // *Math. Phys.* — 1975. — Vol. 16. — P. 598–603.
25. *Ablowitz M. J., Ladik J.* Nonlinear differential–difference equations and fourier-analysis // *Math. Phys.* — 1976. — Vol. 17. — P. 1011–1018.
26. *Agrawal G.* Fiber-optic communication systems. Wiley series in microwave and optical engineering no. т. 1. — Wiley-Interscience, 2002. — ISBN: 9780471215714.
27. *Kashyap R.* Fiber Bragg Gratings. Electronics & Electrical. — Elsevier

Science, 1999. — ISBN: 9780124005600.

28. Efficient numerical method of the fiber bragg grating synthesis / O. V. Belai, L. L. Frumin, E. V. Podivilov, D. A. Shapiro // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2007. — Jul. — Vol. 24, no. 7. — P. 1451–1457.
29. *Lamb G.* Elements of Soliton Theory. A Wiley-Interscience publication. — Wiley, 1980. — ISBN: 9780471045595.
30. *Vasylchenkova A., Prilepsky J. E., Turitsyn S. K.* Contour integrals for numerical computation of discrete eigenvalues in the zakharov–shabat problem // *Optics Lett.* — 2018. — Vol. 43, no. 15. — P. 3690–3693.
31. *Delves L. M., Lyness J. N.* A numerical method for locating the zeros of an analytic function // *Math. Comp.* — 1967. — Vol. 21. — P. 543–560.
32. *Kublanovskaya V. N.* On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 1963. — Vol. 1, no. 3. — P. 637–657.
33. *Francis J.* The qr transformation, i // *The Computer Journal.* — 1961. — P. 265–271.
34. *Francis J.* The qr transformation, ii // *The Computer Journal.* — 1962. — P. 332–345.
35. Error vector magnitude as a performance measure for advanced modulation formats / Rene Schmogrow, Bernd Nebendahl, Marcus Winter et al. // *IEEE Photonics Technology Letters.* — 2012. — Vol. 24, no. 1. — P. 61–63.
36. *Skaar J., Waagaard O.* Design and characterization of finite length fibre gratings // *IEEE Journal of Quantum Eletronics.* — 2003. — Vol. 39, no. 10. — P. 1238–1245.
37. Stochasticity, periodicity and coherent structures in partially mode-locked fibre lasers / Dmitry Churkin, Srikanth Sugavanam, Nikita Tarasov et al. — 2014. — Access mode: https://arxiv.org/abs/1410.1410.
38. *Weerasekara G., et al.* Soliton's eigenvalue based analysis on the generation mechanism of rogue wave phenomenon in optical fibres exhibiting weak third order dispersion // *Opt. Express.* — 2015. — Vol. 23. — P. 143–153.
39. *Osborne A.* Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform. International Geophysics. — Elsevier Science, 2010. — ISBN: 9780080925103.

40. *Bube K. P., Burridge R.* The one-dimensional inverse problem of reflection seismology // *SIAM Review.* — 1983. — Vol. 25, no. 4. — P. 497–559.
41. *Sarwar A. K. M., et. al.* Modified gelfand - levitan inverse scattering technique in exploration seismology: A suggestion for a fast approximate algorithm // *SEG Technical Program Expanded Abstracts.* — 1987. — P. 447–449.