Алгебра и логика, 63, № 2 (2024), 154—166

DOI: 10.33048/alglog.2024.63.203 УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРУППЫ $A_5 \times A_5 \times A_5$ МНОЖЕСТВОМ РАЗМЕРОВ КЛАССОВ СОПРЯЖЁННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

И. Б. ГОРШКОВ, В. В. ПАНЬШИН

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $N(G)$ множество размеров классов сопряжённости группы G. В 1980-х Дж. Томпсон сформулировал следующую гипотезу: если L — неабелева простая группа, G — конечная группа такая, что $Z(G) = 1$ и $N(G) = N(L)$, то $G \simeq L$. Позже А. С. Кондратьев добавил эту гипотезу в „Коуровскую тетрадь“ [1, вопрос 12.38]. В серии работ многих авторов данная гипотеза была подтверждена. Окончательный шаг в проверке был сделан в [2], где также может быть найден полный исторический обзор доказательства.

Существуют разные способы обобщения гипотезы Томпсона. В данной работе мы рассмотрим один из них. Через G^n обозначим прямое произведение n копий группы G.

ВОПРОС [1, вопрос 20.29]. Пусть S — неабелева конечная простая группа. Верно ли, что для любого $n \in \mathbb{N}$ из того, что $N(G) = N(S^n)$, где G — группа с тривиальным центром, следует изоморфизм $G \simeq S^n$?

*) Работа выполнена в рамках госзадания Ин-та матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

На сегодняшний день неизвестны S и n такие, чтобы ответ на данный вопром был отицателен. В [3, 4] было доказано, что из равенства $N(G) = N(S^2)$, где G — группа с тривиальным центром, а $S \in \{A_5, A_6\}$, следует изоморфизм $G \simeq S^2$. В настоящей работе докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть G — конечная группа такая, что $Z(G) = 1$ и $N(G) = N(A_5 \times A_5 \times A_5)$. Тогда $G \simeq A_5 \times A_5 \times A_5$.*

Несложно понять, что если группа G представима в виде прямого произведения групп A и B, то $N(G) = N(A) \cdot N(B)$, где множества перемножаются поэлементно. Нас интересуют те случаи, для которых выполнено обратное утверждение.

ВОПРОС [5]. Пусть G — группа, такая что $N(G) = \Omega_1 \cdot \ldots \cdot \Omega_n$. Какие множества Ω_i гарантируют, что $G \simeq H_1 \times \ldots \times H_n$, где $N(H_i) = \Omega_i$?

Данный вопрос изучался только для случая $n = 2$, см. напр., [5–9]. Основной результат данной работы при дополнительном условии $Z(G) = 1$ дает ответ на поставленный выше вопрос при $n = 3$.

§ 1. Предварительные сведения

Все группы, рассматриваемые в данной работе, будут предполагаться конечными. Пусть n — натуральное число и π — множество простых чисел. Через n_π обозначим π-часть числа n, то есть наибольший делитель k числа n такой, что $\pi(k) \subseteq \pi$; и через $n_{\pi'}$ обозначается π'-часть числа n, т. е., n/n_π. Через $\pi(G)$ обозначим множество простых делителей порядка группы G. Пусть x — элемент группы G. Тогда x^G — класс сопряжённости группы G, содержащий x, и $|x^G|$ — его размер. Если H — это подгруппа группы G, то $Ind(H, x) = |x^H| = |H|/|C_H(x)|$.

ЛЕММА 1.1. *Верны следующие утверждения*:

$N(A_5) = \{1, 12, 15, 20\}$;

$n \in N(A_5 \times A_5 \times A_5)$ *тогда и только тогда, когда* $n = a \cdot b \cdot c$, *где* $a, b, c \in N(A_5)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы 1.1 легко проверяются. □

В следующей лемме приведены хорошо известные факты о размерах классов сопряжённости (см., напр., [3, лемма 1]).

ЛЕММА 1.2. *Пусть G — конечная группа, $K \trianglelefteq G$ и $\overline{G} = G/K$. Пусть $x \in G$ и $\overline{x} = xK \in G/K$. Тогда $|x^K|$ и $|\overline{x}^{\overline{G}}|$ делят $|x^G|$. В частности, если $L < M$ — последовательные члены субнормального ряда группы G, $S = M/L$, $y \in M$ $\widetilde{y} = yL$ — образ элемента y в S, то $|\widetilde{y}^S|$ делит $|y^G|$.*

ЛЕММА 1.3 [10, теор. 6.2.2(iv)]**.** *Пусть G — конечная группа, $K \trianglelefteq G$ и $\overline{G} = G/K$. Пусть $x \in G$ и $\overline{x} = xK \in G/K$. Если $(|x|, |K|) = 1$, то $C_{\overline{G}}(\overline{x})$ равен образу $C_G(x)$ в $\overline{G}$. В частности, $|x^G| = |x^K| \cdot |\overline{x}^{\overline{G}}|$.*

Будем называть фактор субнормального ряда группы G субнормальным фактором.

ЛЕММА 1.4. *Пусть $g \in G$ — p-элемент, M — субнормальный фактор в $C_G(g)$ и $h \in M$ — r-элемент, где $r \neq p$. Тогда $Ind(G, g) \cdot Ind(M, h)$ делит число из $N(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h_1 — прообраз элемента h в $C_G(g)$, являющися p-элементом. Тогда по лемме 2 индекс $Ind(M, h)$ делит $Ind(C_G(g), h_1)$. Кроме того, $C_G(gh_1) = C_G(g) \cap C_G(h_1)$, так как $[g, h_1] = 1$ и $(|g|, |h_1|) = 1$. Следовательно, $Ind(G, gh_1) = |G : C_G(g)| \cdot |C_G(g) : C_G(gh_1)| = Ind(G, g) \cdot Ind(C_G(g), h_1)$. Таким образом, $Ind(G, g) \cdot Ind(M, h)$ делит $Ind(G, gh_1)$. □

ЛЕММА 1.5 [10, теор. 5.1.4]**.** *Пусть ψ — это p'-автоморфизм p-группы P, индуцирующий тривиальный автоморфизм на $P/\Phi(P)$. Тогда ψ действует тривиально на P.*

ЛЕММА 1.6 [10, теор. 5.2.3]**.** *Пусть A — p'-группа автоморфизмов абелевой p-группы P. Тогда $P = C_P(A) \times [P, A]$.*

Напомним, что группа G называется π-отделимой, если каждый композиционный фактор группы G является π'-группой или π-группой.

Несложно заметить, что разрешимая группа G является π-отделимой для каждого множества π.

ЛЕММА 1.7 [10, теор. 6.3.2]**.** *Пусть G — π-отделимая группа и $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$. Тогда $C_{\overline{G}}(O_\pi(\overline{G})) \leq O_\pi(\overline{G})$.*

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная группа такая, что $N(G) = N(A_5 \times A_5 \times A_5)$ и $Z(G) = 1$. Из леммы 1.1 и [8, след. 1] следует, что $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$. Пусть L — нормальная разрешимая подгруппа в G. Будем говорить, что для L выполнено условие:

(1) если $\{3, 5\} \in \pi(L)$;

(2) если для любого $x \in L$ верно, что $Ind(G, x)_{2'} = Ind(L, x)_{2'}$;

(3) если $|L|_3 \geq 3^2$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $G_1 \trianglelefteq G$, $H, K \trianglelefteq G_1$ и H/K — 3-группа. Тогда любой 5-элемент $g \in G_1$ централизует H/K.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.5 можем считать, что H/K — элементарная абелева 3-группа. Тогда по лемме 1.6 выполнено разложение $H/K = C_{H/K}(g) \times [H/K, g]$. Поэтому $|Ind(H/K, g)| = |[H/K, g]| = 3^{4k}$, т. к. 5-элемент не может дейстовать без неподвижных точек на группе порядка 3^l, где $l < 4$. По лемме 1.2 число $|Ind(H/K, x)|$ делит $|x^G|$. Противоречие с тем, что $N(G)$ не содержит чисел, делящихся на 3^4. □

ЛЕММА 2.2. *Пусть для L выполнено условие* (1)*. Тогда $O_{\{2,5\}}(L)$ содержит силовскую 5-подгруппу группы L.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{L} = L/O_{\{2,5\}}(L)$. Тогда $O = O_3(\overline{L}) \neq$ $\neq 1$. По лемме 1.7 имеем $C_{\overline{L}}(O) \leq O$. Если $|\overline{L}|$ делится на 5, то любой 5-элемент $x \in \overline{L}$ действует на $\overline{O}$ нетривиально. Получаем противоречие с леммой 2.1. □

В следующих двух леммах будем использовать такие обозначения: $\overline{L} = L/O_2(L)$, $O = O_5(\overline{L})$.

ЛЕММА 2.3. *Пусть для L выполнены условия* (1), (2). *Пусть $x \in \overline{L}$ — неединичный* 3*-элемент. Тогда x действует сопряжёнием на O нетривиально. В частности, индекс любого неединичного* 3*-элемента группы L делится на* 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что найдётся неединичный 3-элемент $x \in \overline{L}$, действующий тривиально на O. Пусть $C = C_{\overline{L}}(O)$, $\overline{H}$ — минимальная нормальная подгруппа группы C. Из определения групп O и $\overline{H}$ следует, что $\overline{H}$ — 3-подгруппа. Поскольку $C_{\overline{L}}(O)$ нормальная подгруппа, $\overline{L}$ содержит нетривиальную нормальную 3-подгруппу H.

Пусть P_5 — некоторая силовская 5-подгруппа группы $\overline{L}$. Предположим, что P_5 действует тривиально на H. Тогда для любого $y \in H$ верно $Ind(\overline{L}, y)_5 = 1$. Из того, что $H \trianglelefteq \overline{L}$ следует, что в H найдётся неединичный элемент z, лежащий в центре некоторой силовской 3-подгруппы группы $\overline{L}$, т. е. $Ind(\overline{L}, z)_3 = 1$. Поскольку $|O_2(L)|$ не делится на 3, то и в L найдётся 3-элемент z' такой, что $Ind(L, z')_{\{3,5\}} = Ind(G, z')_{\{3,5\}} = 1$, противоречие.

Таким образом, найдётся элемент $r \in P_5$, действующий на H нетривиально. По лемме 1.5, r действует нетривиально на $V = H/\Phi(H)$. По лемме 2.1 приходим к противоречию. □

ЛЕММА 2.4. *Пусть для L выполнены условия* (2), (3). *Тогда $O = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{\ } : \overline{L} \to \overline{L}/\Phi(O)$ — естественный гомоморфизм. Из лемм 1.5 и 2.3 следует, что любой неединичный 3-элемент группы $\widetilde{L}$ действует нетривиально на $\widetilde{O}$. Пусть $x \in Z(P) \setminus \{1\}$ — элемент порядка 3, где $P \in Syl_3(\widetilde{L})$. По лемме 1.6 имеем разложение $\widetilde{O} = C_{\widetilde{O}}(x) \times [\widetilde{O}, x]$. Заметим, что $|[\widetilde{O}, x]|$ делит $Ind(L, x)$, т. е., $|[\widetilde{O}, x]| \in \{5, 5^2, 5^3\}$. Из того, что x действует без неподвижных точек на $|[\widetilde{O}, x]|$ следует, что $|[\widetilde{O}, x]| - 1$ делится на 3. Таким образом, $|[\widetilde{O}, x]| = 5^2$. Имеем $Aut([\widetilde{O}, x]) \simeq GL_2(5)$, значит $|Aut([\widetilde{O}, x])|_3 = 3$. Так как $P \leq N_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x])$ и $N_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x])/C_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x]) \leq Aut([\widetilde{O}, x])$, то

$$PC_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x])/C_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x]) \simeq P/C_P([\widetilde{O}, x]) \leq Aut([\widetilde{O}, x]).$$

Таким образом, $P/C_P([\widetilde{O}, x]) \simeq \langle x \rangle$ и $P = C_P([\widetilde{O}, x]) \times \langle x \rangle$. Так как $|P|_3 = |\overline{L}|_3 \geq 3^2$, то найдётся $1 \neq z \in P$ такой, что $z \in C_{\widetilde{L}}([\widetilde{O}, x])$. Если z

действует тривиально на $C_{\widetilde{O}}(x)$, то z действует тривиально на $\widetilde{O}$, противоречие. Значит, $Ind(C_{\widetilde{O}}(x), z)_5 = Ind(\widetilde{O}, z)_5 = 5^2$.

Ясно, что $C_{\widetilde{O}}(x) \cap C_{\widetilde{O}}(z) \leq C_{\widetilde{O}}(xz)$. Допустим, что найдётся $a \in \in C_{\widetilde{O}}(xz) \setminus C_{\widetilde{O}}(x) \cap C_{\widetilde{O}}(z)$. Имеем $a = cb = (cb)^{xz} = c^z b^x$, где $c \in C_{\widetilde{O}}(x)$ и $b \in [\widetilde{O}, x]$. Из того, что $c^z \in C_{\widetilde{O}}(x)$, $b^x \in [\widetilde{O}, x]$ и единственности разложения элемента a следует, что $c^z = c$ и $b^x = b$. Значит, $a \in C_{\widetilde{O}}(x) \cap C_{\widetilde{O}}(z)$, противоречие. Таким образом $C_{\widetilde{O}}(x) \cap C_{\widetilde{O}}(z) = C_{\widetilde{O}}(xz)$. Тогда $Ind(\widetilde{O}, xz)$ делится на 5^4, что невозможно. Следовательно, $O = 1$. □

Предположим, что группа G разрешима. В этом случае условия (1), (2) для G очевидно выполнены, а условие (3) верно в силу леммы 1.1. Тогда заключения лемм 2.2–2.4 верны для G. Таким образом, из леммы 2.2 следует, что $O_{\{2,5\}}(G)$ содержит силовскую 5-подгруппу группы G. По лемме 2.4, $O_{\{2,5\}}(G) = O_2(G)$. Из этого противоречия следует, что группа G неразрешима.

Пусть K — разрешимый радикал группы G, $\overline{} : G \to G/K$ — естественный гомоморфизм, $C = S_1 \times \ldots \times S_n < \overline{G}$ — цоколь группы $\overline{G}$, где S_i — неабелевые простые группы. Так как $\pi(S_i) \subseteq \pi(G)$, то $S_i \in \{A_5, A_6, U_4(2)\}$. Далее мы будем использовать информацию об этих группах из [11].

ЛЕММА 2.5. *В композиционном ряду группы* $\overline{G}$ *нет фактора, изоморфного* $U_4(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует элемент $\overline{x} \in U_4(2)$ такой, что 3^4 делит $|\overline{x}^{U_4(2)}|$, а значит, 3^4 делит $|x^G|$ по лемме 1.2; противоречие. □

ЛЕММА 2.6. *Имеет место* $|\overline{G}/C|_{\{3,5\}} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\overline{G} \leq Aut(C)$. Предположим, что $n \geq 4$. Тогда найдётся элемент $x \in G$ такой, что $|x^G|_2 > 2^6$, поэтому $|x^G| \notin N(G)$. Таким образом, $|Out(C)|_5 = 1$. Если $n \in \{1, 2\}$, то $|\overline{G}/C|_3 = 1$. Поэтому $n = = 3$. Если один из прямых множителей цоколя равен A_6, то вновь получаем противоречие с определением множества $N(G)$. Таким образом, $C = A_5 \times \times A_5 \times A_5$. Следовательно, если 3 делит $|\overline{G}/C|$, то $\overline{G}$ содержит подгруппу, изоморфную $H = (A_5 \times A_5 \times A_5).a$, где $|a| = 3$. Но тогда существует $x \in H$ такой, что $|x^H| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$; противоречие. □

Ниже запись $G = G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_k$ означает, что G является произведением своих попарно коммутирующих подгрупп $G_1, \ldots, G_k$. Пусть далее $F = K.C$, т. е. прообраз группы C в G.

ЛЕММА 2.7. *Выполняется одно из следующих двух утверждений*:

(1) $F \simeq K \times C$;

(2) *Найдётся F-главный фактор M/L группы K такой, что $F/M = K/M \circ B_1 \circ \ldots \circ B_n$, где B_i — совершенное центральное расширение группы S_i для $1 \leq i \leq n$, и для некоторого j группа B_j действует на M/L нетривиально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\overline{C_F(K)} \trianglelefteq \overline{F} = C$. Рассмотрим два случая.

(1) Предположим, что $\overline{C_F(K)} = C$. Обозначим через $D = C_F(K)^\infty$ последний нетривиальный член ряда коммутантов $[C_F(K)^{(i)}, C_F(K)^{(i)}]$. Выполняется следующая цепочка: $D/D \cap K \simeq \overline{D} = \overline{C_F(K)}^\infty = C^\infty = C$. Так как $D \cap K \leq Z(K) \cap Z(D) \leq Z(F)$, то для $1 \neq g = D \cap K$ имеем $Ind(F, g) = 1$. Но тогда $Ind(G, g) = 2^\alpha$ по лемме 2.6, что противоречит строению множества $N(G)$. Следовательно, $D \cap K = 1$, откуда $D \simeq C$ и $F \simeq K \times C$.

(2) Предположим, что $\overline{C_F(K)} < C$. Пусть $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \ldots \lhd K_t = K$ некоторый F-главный ряд группы K. Выберем наименьшее i такое, что

$$(C_{F/K_i}(K/K_i)K/K_i)/(K/K_i) < C$$

и

$$(C_{F/K_{i+1}}(K/K_{i+1})K/K_{i+1})/(K/K_{i+1}) = C.$$

Пусть $K_i = L$ и $K_{i+1} = M$. Обозначим через $\sim$ и $\widehat{}$ естественные гоморфизмы из F в фактор по подгруппе M и L, соответственно.

Поскольку $C_{\widetilde{F}}(\widetilde{K})\widetilde{K}/\widetilde{K} = C$, то полагая $\widetilde{D} = C_{\widetilde{F}}(\widetilde{K})^\infty$ и рассуждая аналогично случаю 1, получаем $\widetilde{D} \cap \widetilde{K} \leq Z(\widetilde{F})$ и $\widetilde{D}/\widetilde{D} \cap \widetilde{K} \simeq C$. Таким образом, $\widetilde{F} = \widetilde{K} \circ \widetilde{D}$ и $\widetilde{D}$ является совершенным центральным расширением группы C, а значит, является центральным произведением совершеннных центральных произведений групп S_i.

Поскольку группа $C_{\widehat{F}}(\widehat{K})\widehat{K}/\widehat{K}$? собственная нормальная подгруппа в C, то она тривиально пересекается с S_j для некоторого j. Поскольку $\widehat{M}$ абелева, то группа B_j действует на $\widehat{M}$. Предположим, что действие тривиально, т.е. $C_{\widetilde{F}}(\widehat{M}) \geq B_j$. Из предыдущего абзаца имеем $[\widehat{M}.B_j, \widehat{K}] \leq \widehat{M}$, следовательно $[\widehat{M}.B_j, \widehat{K}, \widehat{M}.B_j] \leq [\widehat{M}.B_j, \widehat{M}] = 1$. Аналогично $[\widehat{K}, \widehat{M}.B_j, \widehat{M}.B_j] = 1$, поэтому по лемме о 3 коммутантах [10, теор. 2.2.3] имеем $[\widehat{M}.B_j, \widehat{M}.B_j, \widehat{K}] = 1$. Поскольку $[B_j, B_j] = B_j$, то $\widehat{M}.B_j \leq C_{\widehat{F}}(\widehat{K})$, что противоречит выбору j. □

ЛЕММА 2.8. *Пусть B — совершенное центральное расширение группы A_5 или A_6 и $p = 2, 5$. Тогда найдётся p'-элемент $g \in B$ такой, что для любого абсолютно неприводимого $F_p[B]$-модуля W верно неравенство $|W : C_W(g)| \geq p^2$ для $p = 5$ и $|W : C_W(g)| \geq p^4$ для $p = 2$. Кроме того, если W — абсолютно неприводимый $F_p[B]$-модуль, то выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) *Найдется p'-элемент $g \in B$ такой, что $|W : C_W(g)|_p \geq p^3$ для $p = 5$ или $|W : C_W(g)|_p \geq p^6$ для $p = 2$.*

(2) *Пара B и $|W|$ — одна из следующих:*

(a) *$SL_2(5)$ и 5^2;*

(b) *A_5 и 5^3;*

(c) *A_5 и 2^4.*

В любом из случаев (a)–(c) *действие группы B на W точное и для $q \in \{2, 5\} \setminus \{p\}$ найдётся q-элемент $g \in B$ такой, что $|W : C_W(g)|_p = p^2$ для $p = 5$ или $|W : C_W(g)|_p = p^4$ для $p = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из таблиц модулярных характеров в GAP, [12]. □

ЛЕММА 2.9. *Случай* 2 *леммы* 2.7 *невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим M/L через V, B_j через B и простой делитель $|M/L|$ через p. Предположим, что $p = 3$. Применяя лемму 2.1, видим, что любой 5-элемент $g \in B$ действует тривиально на M/L. Так как B порождается 5-элементами, то в таком случае B действует тривиально на M/L, противоречие.

Таким образом, $p \in \{2, 5\}$. Рассмотрим V как $F_p[F/L]$-модуль. Так как $B \trianglelefteq F/L$ и V — нетривиальный неприводимый $F_p[F/L]$-модуль, по теореме Клиффорда выполнено разложение $V = \bigoplus^k W_i$, где W_i — неприводимые $F_p[B]$-подмодули модуля V.

Предположим, что $W = W_i$ — неприводимый, но не абсолютно неприводимый $F_p[B]$-подмодуль. Из описания неприводимых представлений группы B (см. GAP) следует, что полем разложения группы B является $E = F_{p^2}$. Значит, $W^E = W^1 \bigoplus W^2$, где W^i — абсолютно неприводимые $E[B]$-модули, более того характеры соответствующих представлений сопряжёны элементом из $Gal(F_{p^2} : F_p)$ [13, теор. 9.21(c)]. Таким образом, получаем равенство $\dim W^1 = \dim W^2 = \dim W/2$ и для любого p'-элемента $g \in B$ выполнено $\dim C_{W^1}(g) = \dim C_{W^2}(g) = \dim C_W(g)/2$. Из полученных равенств получаем, что $|W| = |W^i|$ и $|W : C_W(g)| = |W^i : C_{W^i}(g)|$. Итак, при подсчете индексов элементов можем считать, что W — абсолютно неприводимый $F_p[B]$-подмодуль V.

Вернемся к разложению $V = \bigoplus^k W_i$ и обозначим $V.B$ через H. Если $g_1 \in B$ — некоторый p'-элемент, то g далее обозначает его прообраз в H, являющийся p'-элементом. По лемме 1.3 выполнено

$$Ind(H, g) = Ind(B, g_1) \cdot Ind(V, g_1).$$

Кроме того, отметим, что $Ind(B, g_1) \geqslant p$.

По лемме 2.8 найдётся p'-элемент $g_1 \in B$ такой, что для любого i имеем $|W_i : C_{W_i}(g_1)| \geq p^2$ при $p = 5$ и $|W_i : C_{W_i}(g_1)| \geq p^4$ при $p = 2$. Поскольку $Ind(V, g_1) = \prod^k |W_i : C_{W_i}(g_1)|$ и в $N(G)$ нет чисел, кратных 5^4 или 2^6, можем считать, что $k = 1$.

По тем же соображениям можем считать, что для B и V имеет место случай 2 леммы 2.8, и пусть $g_1 \in B$ такой q-элемент, что $|V : C_V(g_1)|_p = p^2$ для $p = 5$ или $|V : C_V(g_1)|_p = p^4$ для $p = 2$. Тогда $Ind(H, g)_p = Ind(B, g_1)_p \cdot$ $\cdot\, Ind(V, g_1)_p$ больше p^2 для $p = 5$ и p^5 для $p = 2$, а значит, он в точности равен p^3 и p^6 соответственно.

Предположим, что $n > 1$ и пусть A — некоторый из множителей $B_1, \ldots, B_n$, отличный от B. Поскольку g — p'-элемент, то $C_{F/L}(g)$ отображается на централизатор соответствующего элемента в F/M по лемме 1.3. Значит, A является субнормальным фактором в $C_{F/L}(g)$. Найдётся 3-элемент $h \in A$ такой что $Ind(A,h)_p > 1$. По лемме 1.4 в $N(F/L)$ найдётся число, делящееся на 5^4 или 2^7, противоречие. Таким образом, $F/M = K/M \circ B$.

Обозначим через R полный прообраз $O_{p'}(K/L)$ в F. Пусть $\widetilde{\ } : F \to \to F/R$ — естественный гомоморфизм. Тогда $O_{p'}(\widetilde{K}) = 1$. Отметим, что $H \cap \cap O_{p'}(K/L) = 1$, поскольку в H не существует нетривиальных p'-подгрупп, действующих тривиально на V. Следовательно, $\widetilde{H} \simeq H$.

Предположим, что $3 \in \pi(R)$. Пусть $\widehat{\ } : F \to F/O_{3'}(R)$ — естественный гомоморфизм. Тогда $\widehat{O} = O_3(\widehat{R}) \neq 1$. По лемме 2.1 любой 5-элемент группы $\widehat{F}$ централизует $\widehat{O}$. Поскольку H порождается своими 5-элементами, то в $C_{\widehat{F}}(\widehat{O})$ найдётся субнормальный фактор, изоморфный H. Поскольку $\widehat{O} \trianglelefteq \widehat{F}$, найдётся элемент $\widehat{w} \in \widehat{O}$ такой, что $Ind(\widehat{F}, \widehat{w})_3 = 1$. Тогда $Ind(F,w)_3 = 1$, где w — прообраз $\widehat{w}$ в F, являющийся 3-элементом. Следовательно, $Ind(G,w)_3 = 1$ по лемме 2.6, и тогда $Ind(G,w)_p > 1$. Так как H — субнормальный фактор в $C_{\widehat{F}}(\widehat{O}) \leq C_{\widehat{F}}(\widehat{w}) = \widehat{C_F(w)}$, по лемме 1.4 заключаем, что $Ind(G,w)_p \cdot Ind(H,g)_p$ делит число в $N(G)$, противоречие.

Таким образом, $3^3 \mid |\widetilde{F}|$. Так как $\widetilde{F}/C_{\widetilde{F}}(\widetilde{V}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{V})$ и $|Aut(\widetilde{V})|_3 \leq \leq 3^2$, то 3 делит порядок $|C_{\widetilde{F}}(\widetilde{V})|$. Пусть $h \in C_{\widetilde{F}}(\widetilde{V})$ — нетривиальный 3-элемент. Заметим, что $C_{\widetilde{F}}(\widetilde{V})/\widetilde{V} \leq \widetilde{K}/\widetilde{V} \leq C_{\widetilde{K}/\widetilde{V}}(g\widetilde{V}) = C_{\widetilde{F}}(g)/\widetilde{V}$. Применяя лемму 1.4 видим, что произведение $Ind(\widetilde{F},g)_p \cdot Ind(\widetilde{K}/\widetilde{V}, h\widetilde{V})_p$ должно не превосходить 2^6 или 5^3, соответственно. Таким образом,

$$Ind(\widetilde{K}/\widetilde{V}, h\widetilde{V})_p = 1,$$

т. е. h централизует силовскую p-подгруппу группы $\widetilde{K}/\widetilde{V}$. Применяя [10, теор. 5.3.2], видим что h централизует силовскую p-подгруппу группы $\widetilde{K}$, а значит и $O_p(\widetilde{K})$. Однако $C_{\widetilde{K}}(O_p(\widetilde{K})) \leq O_p(\widetilde{K})$ по лемме 1.7. □

Значит, выполнен случай 1 леммы 2.7. В серии лемм докажем, что в таком случае $G \simeq A_5 \times A_5 \times A_5$.

ЛЕММА 2.10. *Пусть* $x \in K \setminus \{1\}$. *Тогда* $Ind(G,x)_{2'} = Ind(K,x)_{2'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $G = (K \times C).T$, где T — 2-группа по лемме 2.6. $\square$

ЛЕММА 2.11. *Если* $K > 1$, *то* $\{3, 5\} \in \pi(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in K \setminus \{1\}$. По лемме 2.10 имеем $Ind(G, x)_{2'} = Ind(K, x)_{2'}$, поэтому можем считать, что $p \mid |K|$, где $p \in \{3, 5\}$. Пусть $P \in Syl_p(G)$ и $p \neq q \in \{3, 5\}$. Так как K нормальна в G, то $K \cap P \trianglelefteq P$ и найдётся $1 \neq y \in Z(P) \cap (K \cap P)$. Заметим, что $|y^G|_q \neq$ $\neq 1$. Из леммы 2.10 следует, что $Ind(G, y)_{2'} = Ind(K, y)_{2'}$. Таким образом, $q \mid |K|$. $\square$

ЛЕММА 2.12. *Если* $K > 1$, *то* $|K|_3 \geq 3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что K — нетривиальная подгруппа. Пусть $^- : K \to G/O_2(K)$ — естественный гомоморфизм и $O = O_5(\overline{K})$. По лемме 2.11 имеем, $O_5(\overline{K})$ нетривиальна. Пусть $\widetilde{\ } : K \to \overline{K}/\Phi(O)$ — естественный гомоморфизм. Из леммы 1.5 и леммы 2.3 следует, что любой неединичный 3-элемент группы $\widetilde{K}$ действует нетривиально на $\widetilde{O}$. Пусть $x \in Z(P) \setminus \{1\}$, где $P \in Syl_3(\widetilde{K})$. По лемме 1.6 имеем разложение $\widetilde{O} =$ $= C_{\widetilde{O}}(x) \times [\widetilde{O}, x]$. Заметим, что $|[\widetilde{O}, x]|$ делит $Ind(K, x)$, т. е., $|[\widetilde{O}, x]| \in$ $\in \{5, 5^2, 5^3\}$. Из того, что x действует без неподвижных точек на $[\widetilde{O}, x]$ следует, что $|[\widetilde{O}, x]| - 1$ делится на 3. Таким образом $|[\widetilde{O}, x]| = 5^2$.

Если G содержит более одного неабелевого композиционного фактора, то в этом случае $N(G)$ содержит элемент, делящийся на 5^4, противоречие. Поэтому $C \in \{A_5, A_6\}$. Предположим, что $C \simeq A_6$. Пусть $x \in C$ такой, что $|x| = 4$. Имеем $Ind(G/K, x) = Ind(G, x')$, где x' — прообраз элемента x. Но $Ind(G/K, x) = 3^2 \cdot 5 \notin N(G)$, противоречие. Поэтому получаем, что $A_5 \simeq C \leq G/K \leq Aut(C)$. Таким образом $|G/K|_3 = 3$ и, следовательно, $|K|_3 \geq 3^2$. $\square$

Из лемм 2.10–2.12 следует, что условия $(1), (2), (3)$ выполнены для K, а значит, заключения лемм 2.2–2.4 верны для K. Вновь получаем противоречие с разрешимостью K. Таким образом, $K = 1$ и, следовательно, $C \leq G \leq Aut(C)$.

ЛЕММА 2.13. $C = A_5 \times A_5 \times A_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в C меньше трех множителей, то $|G|_5 > > |Aut(C)|_5$, противоречие. Если множителя три и среди них есть A_6, то найдётся $x \in C$ такой, что $|x^C|_3 > 3^3$. $\square$

ЛЕММА 2.14. $G \simeq A_5 \times A_5 \times A_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.13 имеем, что $S_1 \times S_2 \times S_3 \leq G \leq \leq Aut(S_1 \times S_2 \times S_3) = Aut(S_i) \wr Sym_3$, где $S_i \simeq A_5$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Предположим, что $G \not\simeq A_5 \times A_5 \times A_5$. По лемме 2.6 можем считать, что $|G|_{3,5} = 3^3 \cdot 5^3$, следовательно, $A_5 \times A_5 \times A_5 < G \leq (A_5 \times A_5 \times A_5) \rtimes (C_2 \times \times D_4)$, тогда для некоторого элемента $g \in A_5 \times A_5 \times A_5$ имеем $|g^G| = 2^k \cdot a$, где $a \in N(G)$, противоречие. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. I. Khukhro, V. D. Mazurov* (eds.), Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook, No. 20, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2022; `https://alglog.org/20tkt.pdf`
2. *I. B. Gorshkov*, On Thompson's conjecture for finite simple groups, Commun. Algebra, **47**, No. 12 (2019), 5192—5206.
3. *I. B. Gorshkov*, On characterization of a finite group by the set of conjugacy class sizes, J. Algebra Appl., **21**, No. 11 (2022), Article ID 2250226, 8 p.
4. *V. Panshin*, On recognition of $A_6 \times A_6$ by the set of conjugacy class sizes, Sib. El. Math. J., **19**, No. 2 (2022), 762—767.
5. *I. B. Gorshkov*, Structure of finite groups with restrictions on the set of conjugacy classes sizes, Commun. Math., **32**, No 1 (2024), 63—71.
6. *A. Beltran, M. J. Felipe*, Some class size conditions implying solvability of finite groups, J. Group Theory, **9** (2006), 787—797.
7. *A. Beltran, M. J. Felipe*, Variations on a theorem by Alan Camina on conjugacy class sizes, J. Algebra, **296**, No 1 (2006), 253—266.
8. *A. R. Camina*, Arithmetical conditions on the conjugacy class numbers of a finite group, J. London Math. Soc. (2), **5** (1972), 127—132.
9. *C. Shao, Q. Jiang*, Determining group structure by set of conjugacy class sizes, Comm. Algebra, **48**, No. 4 (2020), 1626—1631.

10. *D. Gorenstein*, Finite Groups, New York: Harper and Row, Publishers Inc., 1968.
11. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.
12. *The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, Programming — A System for Computational Discrete Algebra*, vers. 4.10.2 (2019);

    `http://www.gap-system.org`
13. *I. M. Isaacs*, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, 1976.

Поступило 22 августа 2022 г.

Окончательный вариант 6 декабря 2024 г.

Адреса авторов:

ГОРШКОВ Илья Борисович,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский гос. техн. ун-т,

г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: ilygor8@gmail.com

ПАНЬШИН Виктор Владимирович, Новосибирский гос. ун-т, г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: groupk1ller@yandex.com